14 hetes tantárgyprogram

Hét	Ea/Gy	Témakör
1.	4 ó. ea.	A felsőgeodézia feladata, kapcsolatai. A földalak fogalmak, potenciálelméleti alapfogalmak.
2.	4 ó. ea. 2 ó. gy.	A földi nehézségi erőtér potenciáljával összefüggő alapismeretek és a nehézségi erőtér elemi változása. A földalak meghatározásának alapelve (analitikus és szintetikus módszerek). *1. gyakorlat:* A felsőgeodéziában alkalmazott koordináta-rendszerek.
3.	4 ó.ea. 2 ó.gy.	A felsőgeodézia mérési műveletei és eredményeik. *2. gyakorlat:* Ellipszoidi koordináták számítása.
4.	4 ó.ea.	Geodéziai földmodell és a geodéziai vonatkoztatási rendszerek. Az ellipszoid-méretek meghatározása fokméréssel. Nevezetes fokmérések és eredményeik.
5.	4 ó.ea.	A függővonal-elhajlás fogalma és alapösszefüggései. A felületek módszere és alkalmazásának eredményei. Az ellipszoid-méretek meghatározása a szatellitageodézia geometriai módszerével.
6.	4 ó ea. 2 ó. gy.	A fizikai geodézia matematikai és fizikai alapjai. A földi tömegvonzás potenciálfüggvénye gömbfüggvény alakban. A gömbfüggvények geodéziai alkalmazása. *3. gyakorlat:* Geodéziai paraméterek meghatározása a potenciálzavar gömbfüggvénysorából.
7.	4 ó. ea.	A szintszferoidok. A nehézségi erőtér mérése és a nehézségi rendellenességek.
8.	4 ó. ea.	A normál nehézségi erőtér és a geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározásának fizikai módszerei (a potenciálfüggvény sorbafejtésével, ill. szintellipszoiddal). ***1. zárthelyi dolgozat.***
9.	4 ó. ea. 2 ó. gy.	A geodéziai dátum. A vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének gyakorlati megoldásai (önkényes és relatív elhelyezés). *4. gyakorlat:* Vonatkoztatási ellipszoid elhelyezése és tájékozása.
10.	4 ó. ea. 2 ó. gy.	A relatív és abszolút elhelyezés. Átszámítás különböző vonatkoztatási rendszerek között. *5. gyakorlat:* Vonatkoztatási rendszerek közötti átszámítás.
11.	4 ó. ea.	A geoidkép meghatározásának geometriai módszere. A csillagászati szintezés gyakorlati végrehajtása.
12.	4 ó. ea. 2 ó. gy.	A geoidmeghatározás fizikai módszereinek alapjai. *6. gyakorlat:* Geoidmeghatározás csillagászati szintezéssel és a szatellitageodézia geometriai módszerével.
13.	4 ó. ea.	A geoid feletti magasság meghatározására vonatkozó elméleti alapok. A trigonometriai magasságmérés alkalmazása. ***2. zárthelyi dolgozat.***
14.	4 ó. ea. 2 ó. gy.	A peremérték-feladat megoldása a fizikai földfelszínre. A felsőgeodéziai alapismeretek áttekintése és összefoglalás. *7. gyakorlat:* Magassági mérőszámok.

1. Hét

1. ALAPFOGALMAK

11. A felsőgeodézia feladata, kapcsolatai

A **geodézia** a helymeghatározás tudománya. Gyakorlati feladata *a Föld (vagy más égitest) méreteinek, alakjának, térbeli tájékozásának, külső nehézségi erőterének és időbeli változásaiknak meghatározása.*

Ezen belül az **alsógeodézia** a kisebb kiterjedésű területek részletes felmérésével foglalkozik, a **felsőgeodézia** feladata pedig a nagyobb kiterjedésű területek – országok, földrészek és az egész Föld – egységes felmérésének elméleti és gyakorlati megalapozása.

Ebbe a feladatkörbe tartozik a Föld egésze, mint égitest, *méretének, alakjának és külső nehézségi erőterének* a meghatározása. A földtest *térbeli tájékozásának* kérdésével a Globális helymeghatározás és a mesterképzés Kozmikus geodézia tantárgya foglalkozik, ugyanis a Föld helyzetét a forgástengelyen a pólusmozgás, és a forgástengelynek csillagokhoz viszonyított térbeli helyzetét a precesszió és a precessziózavar (vagy csillagászati nutáció) jellemzi.

A felsőgeodézia ismeretanyaga alapvetően a természettudományokból fejlődött ki, így közvetlenül épül a matematika, (a felületek elmélete, a potenciálelmélet, stb.), a fizika (a tömegvonzás), a mechanika (a szabad tengely körüli forgó mozgás elmélete), a csillagászat (az asztrometria és az égi mechanika), a geofizika (a Föld alakját és méreteit befolyásoló fizikai folyamatok) valamint a geológia egyes fejezeteire.

A felsőgeodézia szoros kapcsolatban áll a geodézia többi tudományterületei közül a globális helymeghatározással, a kozmikus geodéziával, az országos felméréseket megalapozó geodéziai alaphálózatok létesítésével kapcsolatos gyakorlati ismeretekkel és kiterjedten alkalmazza a kiegyenlítő számítások módszereit.

12. A földalak fogalmak

A Föld alakjáról a továbbiakban kétféle értelemben fogunk beszélni. Megkülönböztetjük a Föld *fizikai* és az *elméleti* (vagy *matematikai*) *alakját.*

A **Föld fizikai alakján** a szilárd Föld határoló felülete és a felszíni vizek (tavak, tengerek stb.) nyugalomban képzelt (idealizált) felszíne által alkotott felületet értjük. Ez, főként a szárazföldeken igen változatos, szabálytalan felület. Ezt ábrázolják analóg módon, pl. a topográfiai, vagy a hegy- és vízrajzi földrajzi térképeink, digitálisan a térinformatikai adatbázisaink, digitális terepmodelljeink.

A földfelszínnek mintegy 70%-át tengerfelszínek alkotják. Már az ókorban is úgy gondolták, hogy a Föld *egészének* az alakját jobban képviseli a világtengerek sokkal simább, szabályosabb alakú felszíne (és ennek a szárazföldek alatti képzeletbeli kiterjesztése). Az ismeretek különböző fejlettségi fokán a (nyugalomban képzelt) tengerfelszínt más-más matematikai felületnek vélték, és mindenkor ezt tekintették a **Föld elméleti (vagy matematikai) alakjának.**

A korábbi primitív világszemlélet után, amely a Földet *lapos korongnak* képzelte, már az ókori görög, babiloni és más kultúrákban megjelentek azok a tudósok, akik a Föld (elméleti, vagy matematikai) alakját *gömbnek* (a helyi függőleges irányokat gömbsugaraknak) tartották, és a maguk akkori egyszerű eszközeivel – ma meglepő megbízhatósággal – meghatározták egyetlen méretét, a gömb *R* sugarát.

Ez a felfogás tartotta magát egészen a XVII. századig, amikor *Newton* mechanikájának (egyebek mellett a tömegvonzás és a forgásból származó (centrifugális) erőhatás) ismeretében tudatosult az, hogy forgó, folyadékszerű tömeg egyensúlyi alakja gömb nem, hanem valamilyen *forgási ellipszoid* lehet. Ennek megfelelően, a nyugalomban képzelt tengerek felszínét valamely ellipszoid felületdarabjainak, a helyi függőleges irányokat ezen ellipszoid felületi normálisainak tekintették. Ettől kezdődően a Föld matematikai (elméleti) alakjának meghatározására végzett mérések és számítások célja a tengerfelszíneknek megfelelő forgási ellipszoid két méretének, az *a* és a *b* tengelyhosszúságnak megállapítására irányultak.

Háromszögelési és földrajzi helymeghatározási munkái során *Gauss* figyelt fel arra, hogy a geodéziai alapponthálózatának pontjaiban a helyi függőleges irányok többé-kevésbé szabályos eltérést mutattak az ellipszoidi normálisoktól. Annak ismeretében, hogy a szabad folyadékfelszín egyensúlyi állapotában – ha rá csak a nehézségi erő hat – minden pontjában merőleges a nehézségi erő (a helyi függőleges) irányára, arra következtetett, hogy a tengerek felszíne nem forgási ellipszoid alakú, hanem a Föld tömegeloszlásának szabálytalanságai miatt ennél változatosabb felület.

Mint későbben [1.4.] látni fogjuk, valamely erőtérben az erő irányára merőlegesen futó felületeket *szintfelületeknek* nevezzük. Így *Gauss* végül is azt állapította meg, hogy a nyugalomban képzelt tengerek felszíne (és ennek a szárazföldek alatti kiterjesztése) a *nehézségi erőtér szintfelületének alakját veszi fel.*

A megfigyelések szerint a tengerek tényleges szabad felszíne – különböző fizikai hatások következtében – egyrészt helyenként, másrészt ugyanazon helyen is az idő függvényében más és más szintfelületen helyezkedik el. Ezért a földalak-fogalom egységes értelmezése érdekében a szóbajöhető tengerfelszínek közül egyet – *valamely tenger középtengerszintje közelében kijelölt ponton áthaladó szintfelületet* – választjuk. Ezt tekintjük a tengerek nyugalomban képzelt (idealizált) felszínének. Ezt a felületet és ennek a szárazföldek alatti meghosszabbítását tekintjük a Föld elméleti (vagy matematikai) alakjának, amit idegen szóval *geoidnak* nevezünk. Ez, a Föld fizikai alakjánál sokkal kevésbé változatos, simább lefutású, de az ellipszoidnál bonyolultabb felület (amelynek az ellipszoidhoz viszonyított hullámai ±130 méternél nem nagyobbak).

Megjegyezzük, hogy a valódi (pillanatnyi) tengerfelszínek eltérése a geoidtól mintegy ±15 m-en belüli érték, ami az idő függvényében folyamatosan változik. Hosszabb időtartamra középértéket képezve az eltérés mintegy ±2 m-nél kisebb. Ezt nevezzük a *tengerfelszín topográfiájának*, aminek a pillanatnyi tengerfelszínre végzett méréseknek a geoidra átszámításakor van jelentősége.

A földalak fogalom kettősségének megfelelően a földalak meghatározás is kettős feladatot jelent:

- a Föld *fizikai alakjának* (a fizikai földfelszínnek) és
- a Föld *elméleti (matematikai) alakjának* (a geoidnak) a meghatározását.

Mindkettőnek fontos gyakorlati jelentősége van. A *felsőgeodéziában* a Föld meghatározandó *fizikai alakját* a fizikai földfelszínen kijelölt és gondosan állandósított, egymástól néhányszor tíz kilométerre fekvő geodéziai alaphálózati pontok – országokra, földrészekre, az egész földfelszínre kiterjedő (poliédert alkotó) – halmaza és a térbeli helyzetüket megadó koordináták jegyzéke (adatbázisa) jelenti. (A Föld fizikai alakja, vagy a topográfiai földfelszín további részleteinek az alaphálózati pontokra támaszkodó meghatározása és analóg, vagy digitális megjelenítése már *alsógeodéziai* feladat, amivel jelen keretek között nem foglalkozunk.)

Föld *elméleti (matematikai) alakjának* a különös gyakorlati jelentősége abban van, hogy ehhez viszonyítjuk a Föld fizikai felszínén fekvő pontok magasságát (tengerszint feletti magasság). Ezért – különösen a GPS korában – a geoid alakjának meghatározása a mindennapi alsógeodéziai gyakorlat számára is nélkülözhetetlenné vált, mert ennek ismerete teszi lehetővé, pl. a mesterséges holdak észlelésével meghatározott magassági mérőszámoknak *geoid (tengerszint) feletti* magassággá átszámítását.

A geoid, mint a földi nehézségi erőtér szintfelülete, képet ad az erőtér eloszlásáról, így megismerése a geodézia egyik alapfeladata megoldásának, a *nehézségi erőtér meghatározásának* is részét képezi.

A Föld fizikai és elméleti (matematikai) alakjának bizonyos időközönkénti *ismételt meghatározásai* lehetővé teszik a földfelszíni pontok, velük az egyes kéregdarabok, táblák térbeli elmozdulásának, rajtuk keresztül a *földtest időbeli alakváltozásainak* tanulmányozását (vízszintes és függőleges mozgásvizsgálatok). Ezekre a mérési eredményekre támaszkodnak a *geodinamikai* vizsgálatok.

Megjegyezzük, hogy a Föld korábbi matematikai alakjai, a gömb és a forgási ellipszoid sem vesztette el jelentőségét a geodéziában. Az *ellipszoid*, pl. mint a geoidot jól közelítő, viszonylag egyszerű, szabályos matematikai felület, amely a Föld méretét, alakját egészében (a részletek nélkül) jól szemlélteti (modellezi) (*földmodell,* vagy a *Föld normálalakja*), és amely vonatkoztatási (viszonyítási) alapul szolgál mind a Föld fizikai, mind elméleti alakjának meghatározásához (*vonatkoztatási,* vagy *alapfelület*) most is használatos. (Ezekkel a fogalmakkal a későbbiekben fogunk megismerkedni.)

A *gömböt* pedig pl. *simulógömbként* használjuk a földfelszín kisebb kiterjedésű darabjainak matematikai leképezésekor (vetületi számításokban), stb.

13. Potenciálelméleti alapfogalmak

A Föld elméleti (matematikai) alakját szintfelületként értelmezzük. Ennek matematikai tárgyalásához szükséges a matematika potenciálelméletnek nevezett részének rövid összefoglalása.

131. A potenciál fogalma

Ha valamely x,y,z háromdimenziós tér minden pontjához valamilyen *V skalár mennyiség* tartozik, akkor **skalár térről** beszélünk. Ennek leírására a $V = V(x,y,z) = V(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt használjuk. Erről feltételezzük a továbbiakban, hogy folytonos és differenciálható. (Itt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,z)$ a pont helyvektora és x,y,z ennek derékszögű összetevői.)

A térnek valamely azonos skalár értékkel jellemzett pontjai felületet alkotnak, amelyet a skalár mennyiség *szintfelületének* nevezünk. Ennek leírására a

$$V = V(x,y,z) = V(\mathbf{r}) = \textit{állandó}$$

egyenletet használjuk. A skalár mennyiség térbeli változását a *gradiens vektorral* jellemezhetjük. Ennek hatásvonala merőleges a szintfelületre (a legnagyobb változás irányába mutat), értelme a skalár mennyiség növekedésével egyező és nagysága a skalár mennyiség függvényének a legnagyobb változás irányába eső differenciálhányadosával egyenlő. Ilyen értelemben a gradiens vektor nagysága (abszolút értéke) tehát a skalár mennyiségnek a legnagyobb változás irányába eső *hosszegységre vonatkoztatott változását* mutatja.

A gradiens vektor tetszőleges irányú összetevőjének nagyságát megkaphatjuk a skalár mennyiség függvényének kiválasztott irány szerinti differenciálásával.

Ha az x,y,z háromdimenziós tér minden pontjához valamilyen **A** *vektor mennyiség* tartozik, akkor **vektortérről** beszélünk. Ennek leírására az $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)=\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektor-vektorfüggvényt használjuk. Erről feltételezzük a továbbiakban, hogy a szóban lévő térben véges és folytonos.

Ha valamely $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektortér felfogható, mint a $V(x,y,z) = V(\mathbf{r})$ skalár mennyiség gradiensvektorainak a vektortere, akkor a *V skalár mennyiség az* **A** *vektortér potenciálja.* Ez esetben az **A** vektor tetszőleges irányú összetevőjének nagyságát a skalár mennyiség függvényének (a potenciálfüggvénynek) megfelelő irányú deriváltjaként kapjuk.

Ha a vektortér valamilyen erőtér **f** térerősség-vektorainak a tere, akkor az előbbi módon hozzárendelhető skalár mennyiséget *mechanikai potenciálnak* nevezzük. (Emlékeztetünk, hogy a *térerősség* a fajlagos (pl. tömegegységre, töltésegységre, stb.) vonatkoztatott erőhatás.) A térerősség(-vektor) és a hozzárendelhető V potenciál kapcsolata

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\,, \tag{131.1}$$

ahol **i**, **j, k** a koordináta-irányokba mutató egységvektorok.

A mechanikai potenciál *létezésének feltétele* az, hogy az erőtérben végzett elemi munka a potenciál teljes differenciáljával legyen egyenlő, azaz

$$dL = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV \tag{131.2}$$

A *potenciálos erő munkája* független az úttól, és éppen az út két végpontjának potenciálkülönbségével egyenlő.

Ezekből következik, hogy a mechanikai potenciál munka mértékegységű skalár mennyiség. A geodéziában a nehézségi erőtérrel kapcsolatban általában a tömegegységre (1 kg-ra) vonatkoztatott (fajlagos) erőhatást, a nehézségi térerősséget (mértékegysége Newton/kilogramm = N/kg), és ennek megfelelően a *tömegegységre vonatkoztatott (fajlagos) munkát* használjuk a potenciál mérőszámaként (mértékegysége Joule/kilogramm = J/kg, ami egyszerűsítve $m^2\, s^{-2}$ az SI rendszerben).

Ha a vektortérben az erővektorok valamely közös középpont felé irányulnak és nagyságuk az ettől mért távolság függvénye, akkor *központos (centrális) erőtérről* beszélünk.

Ha pedig az erővektorok valamely egyenesre merőlegesen állnak és nagyságuk az ettől mért távolság függvényeként változik, akkor *hengeres erőteret* mondunk.

Az erőtér *örvénymentes*, ha a rotációja nulla

$$\mathbf{rot\ f} = \nabla\times\mathbf{f} = 0\ , \tag{131.3}$$

ahol a nabla vektor, $\nabla = \partial/\partial x\ \mathbf{i} + \partial/\partial y\ \mathbf{j} + \partial/\partial z\ \mathbf{k}$, a *Hamilton-féle operátor*. A potenciálos erőtér mindig örvénymentes.

Az erőtér *forrásmentes,* ha a divergenciája nulla

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} = 0\ . \tag{131.4}$$

Potenciálos erőtérben

$$\mathbf{f} = \mathbf{grad}\ V = \nabla V.$$

Ezzel

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ V = \nabla\nabla V = \Delta V = 0, \tag{131.5}$$

ahol $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, a *Laplace-operátor* és

$$\mathrm{div}\ \mathbf{f} = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{131.6}$$

a *Laplace-egyenlet*, aminek a későbbiekben fontos szerepe lesz. (Megjegyezzük, hogy a (131.6) jobb oldala (az ún. forrásfüggvény) csak forrásmentes térben (mint pl. a Föld tömegén kívül) nulla, *forrásos térben* (pl. a Föld belső terében) nullától eltérő valamilyen függvény.

A potenciál fogalmának bevezetése azért előnyös, mert sok esetben az erőtér leírására ezt a skalár mennyiséget használhatjuk a vektorfüggvények helyett.

132. A tömegvonzás potenciálja

Képzeljük el a tér $\mathbf{r}_M$ helyvektorral megadott pontjába helyezett *M tömegpont* körül Newton-féle tömegvonzás hatására keletkező erőteret. A térnek az $\mathbf{r}$ helyvektorral jellemzett tetszőleges pontjában az $\mathbf{f}$ *térerősség* nagyságát az általános tömegvonzás

$$\mathbf{f} = -k\ \frac{M}{l^2}\frac{\mathbf{l}}{l} \tag{132.1}$$

törvénye írja le, ha bevezetjük az $\mathbf{l} = \mathbf{r}-\mathbf{r}_M$ jelölést. (Ebben k = 6,672 59·10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}, vagy m^3 kg^{-1} s^{-2}, a *Newton*-féle tömegvonzási állandó.) A vonzó erő a tér minden pontjából az *M* tömegpont felé irányul, így az $\mathbf{f}$ vektorok *központos erőteret* alkotnak.

Ha kiszámítjuk az $\mathbf{f}$ erő *dL* elemi fajlagos munkáját és ezt egyenlővé tesszük valamely V skalárfüggvény *dV* teljes differenciáljával, olyan elsőrendű, lineáris differenciálegyenletre jutunk, amelynek integrálásával kapjuk a

$$V = k\ \frac{M}{l} \tag{132.2}$$

skalárfüggvényt. Mivel ez kielégíti a mechanikai potenciál létezésének $dL = dV$ feltételét (hiszen éppen ebből számítottuk ki), ez a skalárfüggvény az *M tömegpont által keltett tömegvonzási erőtér potenciálfüggvénye.* Ehhez az erőtérhez tehát sikerült találni megfeleIő skalár függvényt, azaz potenciált.

A (132.2) értelemszerű alkalmazásával kiszámíthatjuk valamely tetszőleges **test** tömege által keltett tömegvonzási erőtér potenciálját is a test külső terére. A (132.2)-höz hasonló potenciálfüggvényt értelemszerűen felírhatjuk egyenként a test minden egyes dM tömegelemére. Mivel a test valamennyi elemi tömegpontja által keltett vonzási potenciál azonos jellegű skalár mennyiség, ezek a P pontban egyszerűen összegezhetők. Így jutunk az egész *test tömege által keltett vonzási potenciál*

$$V = k \int_{\text{test}} \frac{dM}{l} \tag{132.3}$$

függvényére. Ebből a potenciál értéke minden olyan esetben kiszámítható, ha ismerjük és matematikailag kezelhető módon le tudjuk írni a test sűrűségeloszlását (azaz minden térfogateleméhez tartozó sűrűséget) és a test határoló felületének alakját.

A potenciálfüggvény vizsgálata alapján megállapítható, hogy a **külső, forrásmentes térben** a vonzási potenciál, ennek első és második differenciálhányadosai a végesben véges, folytonos, egyértékű függvények. A potenciál és ennek első deriváltjai a végtelenben reguláris függvények. Mivel a forrásmentes térben az erőtér divergenciája nullaértékű, a potenciálfüggvény kielégíti a (131.6) Laplace- egyenletet, azaz harmonikus függvény. A potenciál *szintfelületei analitikus felületek.*

A vonzó **tömegen belül (a belső térben)** a potenciálfüggvény és első deriváltjai véges, folytonos, egyértékű függvények, de a második deriváltak a sűrűségi határfelületeken ugrásszerű változásokat szenvednek. A vonzó tömegen belül az erőtér divergenciája zérustól eltérő, a helyi sűrűségtől függő véges érték. A potenciál *szintfelületei analitikus felületdarabok mozaikjaiból állnak.*

Feladatok:

- Ellenőrizzük az utoljára kapott potenciálfüggvény mértékegységét, hogy megfelel-e a korábban mondottaknak?
- Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakúak lesznek a centrális erőtér potenciáljának a *V = állandó* értékkel jellemzett szintfelületei!
- Ellenőrizzük, hogy a potenciálfüggvény gradiense megadja-e a térerősség vektorát, vagy valamely koordináta-tengely irányú deriváltja megegyezik-e a térerősség ugyanilyen irányú összetevőjével?
- Számítsuk ki az erőtér divergenciáját és a rotációját. Állapítsuk meg ebből, hogy az erőtér forrásmentes és örvénymentes, azaz valóban potenciálos-e?
- Számítsuk ki az R sugarú és ϑ = állandó (homogén) sűrűségű gömb alakú tömeg vonzási potenciáját a középpontjától $r_P > R$ távolságra lévő P pontban!
- Ellenőrizzük az eredményt, egyrészt a mértékegység szempontjából, másrészt, hogy a kapott potenciálfüggvény sugárirányú deriváltja valóban a térerősséget adja-e?
- Milyen lesz az így keletkező erőtér, milyen alakúak lesznek a szintfelületei és az erővonalai?

Vegyük észre, hogy a külső hatás szempontjából a homogén gömb alakú tömeg a tömegközéppontjába sűríthető! Ugyanez igaz bármely gömbszimmetriás tömegeloszlású, gömb alakú tömeg esetében is.

133. A forgásból származó erőtér potenciálja

Ha a tér tetszőleges vizsgált pontjában elképzelt tömegpont valamely forgástengely körül ω szögsebességgel forog, és eközben p sugarú körpályán mozog, akkor rá a forgásból származó (centrifugális) erő hat. Az így keletkező erőtérnek a térerőssége

$$\mathbf{f}_F = \mathbf{p} \cdot \omega^2. \tag{133.1}$$

Ha ennek a d**p** sugárirányú elemi elmozdulás mellett végzett dL elemi fajlagos munkáját kiszámítjuk és egyenlővé tesszük valamely $V_F(x,y,z)$ skalárfüggvény dV_F teljes differenciáljával, akkor megint elsőrendű, Iineáris differenciálegyenletre jutunk, amiből integrálással a

$$V_{\mathrm{F}} = \tfrac{1}{2}\, p^2\, \omega^2 \qquad (133.\ 2)$$

skalár függvényalakot nyerjük. Ez a *forgásból származó erőtér potenciálja*.

Feladatok:

- Ellenőrizzük, hogy a (133.2) potenciálfüggvényből deriválással megkapható-e a térerősség.
- A 131. végén mondottak figyelembevételével állapítsuk meg, hogy milyen lesz az erőtér eloszlása és milyen alakúak a forgási centrifugális erőtér potenciáljának szintfelületei?
- Számítsuk ki az erőtér divergenciáját!

2. Hét

14. A földi nehézségi erőtér

141. A földi nehézségi erőtér potenciálja

A földi *nehézségi erő* a földi tömegek *Newton*-féle tömegvonzásának, a forgásból származó (centrifugális) erőnek és a külső égitestekkel kapcsolatos árapálykeltő erőnek az eredője. Ez utóbbi viszonylag kicsi, de gyorsan változó érték. Annak érdekében, hogy a nehézségi adataink ezt a rövidperiódusú, gyors változást ne tartalmazzák, mérési eredményeinkből az árapálykeltő erő hatását levonjuk, és a nehézségi értékeket így használjuk fel. A későbbiekben, amikor szükséges, az árapály-hatás adott időpontra vonatkozó értékének hozzáadásával vissza tudjuk állítani a bármikori természetbeni értéket.(Részletesen a Geofizika tantárgy foglalkozik vele.)

Geodéziában – mint már említettük – az erőhatást általában a tömegegységre vonatkoztatjuk, így a *nehézségi erőtér*

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_F + (\mathbf{f}_Á) \qquad (141.1)$$

térerősségét használjuk. (Mértékegysége: N/kg.) Sztatikai számításokban ez szerepel, amikor kiszámítjuk valamely *nyugalomban* lévő *m* tömegű testre ható

$$\mathbf{G} = m\cdot\mathbf{g} \qquad (141.2)$$

nehézségi erő nagyságát (a test súlyát).(Ennek mértékegysége: N.)

Fogalmilag ettől megkülönböztetjük a *szabadesés gyorsulását*, vagy – ahogy geodéziában gyakran használják – a *nehézségi gyorsulást*, ami *dinamikai* számításokban (mint pl. szabad esés, függőleges és ferde hajítás) szerepel. (Ennek mértékegysége ms^{-2}.)

A nehézségi erőtérben szabadon eső *m* tömegű test *dinamikai egyensúlyát Newton 1. törvénye* szabja meg, ami esetünkben

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a}_g\ . \qquad (141.3)$$

A testre ható összes erők eredője most **F** = **G,** amibe beírva a (141.2)-t, és egyszerűsítve *m*-mel, kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_g = \mathbf{g}, \qquad (141.4)$$

vagyis a *szabadon eső test* $\mathbf{a}_g$ *gyorsulása* irány, értelem és nagyság szerint megegyezik a *nehézségi térerősséggel*.

Fogalmilag, és ehhez kapcsolódóan mértékegységükben azonban különböznek egymástól, mert az egyik *térerősség,* míg a másik *gyorsulás,* amit nem célszerű összekeverni. Nem szerencsés ugyanis a sztatikai nyugalomban lévő test súlyát a tömeg és a nehézségi gyorsulás szorzataként értelmezni, hiszen a nyugalomban lévő test gyorsulása értelemszerűen *nulla*! Gyorsulásról csak mozgásban lévő tömeggel kapcsolatban beszélhetünk.

A továbbiakban a nehézségi erőtér leírására a **g** *nehézségi térerősséget* fogjuk általában használni. (Ez felel meg az angol, ill. német nyelvű *„gravity”*, ill. *„Schwere”* kifejezésnek.) A szabadesés gyorsulásáról (*„acceleration of the free fall”*, ill. *„Schwerebeschleunigung”*) csak a szabadon eső test mozgásának leírásakor fogunk beszélni. (A magyar szaknyelvben a két fogalom általában nem válik el, és többnyire – mindkét értelemben – a nehézségi gyorsulást használják. Mértékegységre mindkét értelemben a ms^{-2} használata terjedt el, ami a térerősség vonatkozásában a N/kg-nak kg-mal egyszerűsített alakjaként is felfogható.)

Mivel a nehézségi erő valamennyi összetevője potenciálos erő, ezek potenciáljának összegezésével állítjuk elő a nehézségi erő potenciálfüggvényét a

$$W = V + V_F\,(+V_Á) = k \int_{\text{Föld}} \frac{dM}{l} + ½\, p^2\, \omega^2\, (+\, V_Á) \qquad (141.5)$$

alakban, ahol az árapálykeltő erő zárójelbe tett potenciáljától egyelőre eltekintünk. Mértékegysége – az eddigieknek megfelelően – J/kg.

A Földön kívüli térségben, ahol az ott lévő tömegpontok nem vesznek részt a Föld forgásában (mint, pl. a mesterséges holdak) a nehézségi erőtér potenciálja csak a tömegvonzásból származó $V = V(\mathbf{r})$ potenciálfüggvényre korlátozódik (az árapálykeltő erő potenciálját itt is külön javítással vesszük figyelembe, ahol erre szükség van).

142. A nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületei és erővonalai

A térnek azon pontjai, melyekben a nehézségi erőtér potenciálja ugyanazon számérték, a nehézségi erőtér potenciáljának *szintfelületeit* alkotják. Valamely szintfelület pontjainak a helyzetét a

$$W = W(x,y,z) = W(\mathbf{r}) = \textit{állandó} \qquad (142.1)$$

egyenlettel adhatjuk meg. Mivel a szintfelületeket meghatározó állandó (mun-kaérték) végtelen sok lehet, ezért szintfelület is végtelen sok van, amelyek héjszerűen veszik egymást körül. A nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületei (a továbbiakban röviden: szintfelületek) értelemszerűen [131.] minden pontban merőlegesen haladnak a nehézségi erő (térerősség) irányára. Ha egymást burkoló szintfelületeken kijelöljük a nehézségi erő (térerősség) irányát más szóval a helyi *függőlegest* akkor a szintfelületekre merőlegesen haladó görbesereget (ortogonális trajektóriákat) kapunk. Ezek a nehézségi erőtér *erővonalai*, vagy más néven *függővonalai*.

A függővonal ívelemét **dH**-val jelölve (pozitív értelmét a külső tér irányába felvéve) kiszámíthatjuk, hogy mennyi munkavégzés árán juthatunk az ívelem egyik végpontjáról a másik végpontján áthaladó szintfelületre. Ez éppen a két szintfelület elemi nagyságú

$$dW = \mathbf{g}\cdot\mathbf{dH} = -g\, dH \qquad (142.1)$$

potenciálkülönbsége. Ebből a

$$\frac{dW}{dH} = -g \qquad (142.\ 2)$$

alapvető összefüggés következik.

A szintfelületek általános tulajdonságait a következőkben foglalhatjuk össze:

- a szintfelületen a potenciál értéke W = állandó, fajlagos munkaérték, mértékegysége J/kg, a szintfelület a *nehézségi térerősség potenciáljának* szintfelülete;
- a szintfelület merőleges a nehézségi térerősség vektorára, $\mathbf{g} = \mathbf{grad}\, W$;
- a szintfelület mentén elmozdulva munkavégzés nincs, a szintfelület bármely pontja ugyanazon munkával érhető el;

- két szintfelület között végzendő (vagy az erőtér által végzett) munka állandó, és egyenlő a két szintfelület potenciálkülönbségével;
- valamely szintfelület potenciálértéke az a munkamennyiség, amennyit el kell végezni az erőtérrel szemben, ha 1kg tömeget a szintfelületről nulla potenciálú helyre (pl. gyakorlatilag a csillagközi térbe) akarunk juttatni (pl. űreszközök felbocsátása);
- a szintfelületek potenciálértékét egyelőre mérni nem tudjuk, de potenciálkülönbségüket igen. A geoid potenciálértéket közvetett úton, számítással tudjuk meghatározni [343.].

143. A szintfelületek és a függővonalak görbülete

A szintfelületek és a függővonalak görbületi viszonyai a potenciálfüggvény *második differenciálhányadosaival* jellemezhetők.

Helyi vízszintes (érintő) síkú *x,y,z* koordináta-rendszerben a szintfelületek *x* és *y* irányú görbülete

$$\frac{1}{R_x} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{W_{xx}}{g} \tag{143.1a}$$

és

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{W_{yy}}{g} \;. \tag{143.1b}$$

Az átlagos görbület

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g} \;. \tag{143. 2}$$

A szintfelület görbülete tetszőleges *A* azimútú vertikális síkban

$$\frac{1}{R_A} = -\frac{1}{g}(W_{xx}\cos^2 A + W_{yy}\sin^2 A + 2\,W_{xy}\sin A\cos A). \tag{143.3}$$

A függővonal meridián (*xz*) és rá merőleges és (*yz*) síkú vetületének görbülete

$$\kappa_x = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{W_{xz}}{g} \quad \text{és} \quad \kappa_y = \frac{W_{yz}}{g} \;. \tag{143.4}$$

A függővonal teljes görbülete

$$\kappa = \frac{1}{R_f} = \frac{1}{g}\left(W_{xz}^2 + W_{yz}^2\right)^{1/2}. \tag{143.5}$$

A szintfelületek görbületi viszonyainak tanulmányozása képet ad eltérésükre a központos erőtér gömb alakú szintfelületeitől. (Gömbre vonatkozóan, ugyanis, $R_x \equiv R_y$ és $W_{xx} \equiv W_{yy}$. A centrális erőtér függővonalai pedig, egyenesek, ugyanis $W_{xz} \equiv W_{yz} \equiv 0$).

144. A nehézségi erőtér elemi változása

A nehézségi erőtérben a térerősség iránya és nagysága általában pontról pontváltozó. A nehézségi térerősségnek a P pont szűk környezetében a **ds**(*dx,dy,dz*) elemi elmozduláshoz tartozó **dg** kis változását az erőtér

$$\underset{(3,1)}{\mathbf{dg}} = \underset{(3,3)}{\mathbf{E}} \cdot \underset{(3,1)}{\mathbf{ds}}$$

teljes differenciáljával számíthatjuk ki. Ebben a (3,3) méretű **E** mátrix a **g** vektortér *derivált tenzora*, az *Eötvös*-féle tenzor, amely az erőtér g_x, g_y, g_z összetevői gradiensvektorának 3-3 elemét tartalmazza. Ha a térerősséget a potenciál gradienseként értelmezzük, akkor az *Eötvös*-féle tenzor a *W* potenciálfüggvény tiszta és vegyes második differenciálhányadosaiból áll:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}. \qquad (144.1)$$

Jelentős részüket az *Eötvös*-féle torziós ingával, illetve más (pl. űreszközökön elhelyezett) gradiométerekkel közvetlenül mérni tudjuk.

15. A földalak meghatározásának alapelve

151. A szintfelületek analitikus meghatározása

Mivel egyrészt a Föld elméleti alakját – a geoidot – is szintfelületként értelmeztük, másrészt a szintfelületek alakjának megismerése már jó képet ad az erőtér szerkezetéről, mindenképpen feladatunk a földi nehézségi erőtér egyes szintfelületeinek meghatározása. Tekintve, hogy a szintfelületek a *külső térben analitikus felületek*, meg kell ismerni analitikus meghatározásuk módszerét.

Ez a differenciál-geometria azon tételére támaszkodik, amely szerint 6 mennyiség (ha egymás között bizonyos feltételeket kielégítenek) meghatározza a felületet.

Ez a 6 mennyiség a felület függvényének, esetünkben a *W* potenciálfüggvénynek az első és a második differenciálhányadosaiból állítható elő. Szintfelületi érintősíkú koordináta-rendszerben

$$p = W_x = 0, \qquad r = -\frac{W_{xx}}{W_z} = -\frac{W_{xx}}{g} = 0,$$

$$q = W_y = 0, \qquad s = -\frac{W_{xy}}{W_z} = -\frac{W_{xy}}{g}, \qquad (151.1)$$

$$m = (1+p^2+q^2)^{1/2} = 1, \qquad t = -\frac{W_{yy}}{W_z} = -\frac{W_{yy}}{g}.$$

Belőlük kiszámítható a *Gauss*-féle 6 *alap- (fundamentális) mennyiség*

$$E = 1+p^2 = 1, \qquad L = \frac{r}{m} = -\frac{W_{xx}}{g},$$

$$F = p\cdot q = 0, \qquad M = \frac{s}{m} = -\frac{W_{xy}}{g}, \qquad (151.2)$$

$$G = 1+q^2 = 1, \qquad N = \frac{t}{m} = -\frac{W_{yy}}{g}.$$

Mint látható, ez utóbbiakból (különleges elhelyezésű koordináta-rendszerünkben) egy mennyiség zérussal, kettő az egységgel egyenlő, a maradék háromban pedig a potenciálfüggvénynek egy elsőrendű, egy vegyes és két tiszta másodrendű differenciálhányadosa szerepel. Közülük a két előbbit és a két utóbbinak a különbségét tudjuk közvetlenül mérni (gravimetria és gradiometria). A két tiszta másodrendű differenciálhányados összegét pedig a nehézségi erőtér divergenciájából (forrásosságából) tudjuk kiszámítani. Ez ugyanis a Föld *külső* terében, a Föld forgásában részt nem vevő pontban (pl. űreszközökön) *nulla* értékű ((131.6) *Laplace*-egyenlet), a Föld felszínén fekvő, és vele együttforgó mérési helyen pedig $2\omega^2$ (a forgásból származó erőtér forrásfüggvénye). Így, ha a W_{zz} tiszta második derivált, azaz nehézségi térerősség függőleges gradiense is mérhető, a W_{xx} + W_{yy} *összeg* számítható A W_{zz} mérése, egészen a legutóbbi időkig a többinél csak 1-2 nagyságrenddel kisebb megbízhatósággal sikerült, de a mai eszközökkel (gradiométerekkel) ez a különbség megszűnik.

Előkészületben van a potenciálfüggvény szükséges differenciálhányadosainak kellő megbízhatóságú mérése a külső térben mozgó járműveken, illetve űreszközökön (űrgradiometria), és így a módszer gyakorlatilag alkalmazhatóvá válik.

Emlékeztetünk arra, hogy a földi nehézségi erőtérnek *csak a külső szintfelületei* (amelyek a Föld tömegébe nem metszenek bele) *analitikus felületek,* így ez a megoldás közvetlenül *csak külső szintfelületek* meghatározására alkalmazható. De a Föld tömegeloszlására vonatkozó kellő mennyiségű ismeret birtokában, megfelelő matematikai módszerrel − kisebb-nagyobb megbízhatósággal − következtetni tudunk belőlük a nehézségi erőtér eloszlására a Földhöz közelebbi térségben is.

Sajnos a geoid a földrészek területén belemetsz a Föld tömegébe, és a tömegeloszlásra vonatkozó ismereteink sem elegendőek a geoid kellő megbízhatóságú és részletességű meghatározására ezen a módon, így erre a célra más megoldást (is) kell keresnünk.

Feladat:

- Miért akadálya a módszer alkalmazásának az a körülmény, hogy a geoid belemetsz a Föld tömegébe?

152. A Föld alakjának pontonkénti meghatározása

Ez a módszer abból áll, hogy a felület kellő sűrűségben kiválasztott egyes (diszkrét) pontjainak meghatározzuk a térbeli helyzetét kifejező koordináta-hármasát valamilyen, általunk célszerűen megválasztott koordináta-rendszerben, és a felület további pontjainak helyzetét ezek között megfelelő matematikai (predikciós) eljárással (pl. egyszerű lineáris predikcióval) interpoláljuk. A módszer közvetlen eredménye a kiválasztott felületpontok koordináta-jegyzéke (adatbázisa). Adott esetben ebből rajzi (analóg) ábrázolást is készíthetünk. (Ez lényegében ugyanaz a módszer, amit a fizikai földfelszín egyes kisebb darabjainak meghatározására a domborzat felmérésekor az alsógeodéziában használunk.)

A pontonkénti meghatározás módszere egyaránt alkalmazható mind a Föld fizikai, mind elméleti alakjának (a geoidnak) meghatározására.

Emlékeztetünk, hogy a felsőgeodéziában a Föld *fizikai alakjának* meghatározásán nem a helyi részletek bemérését, és ábrázolását, hanem csak az ennek alapjául szolgáló geodéziai alaphálózat fizikai földfelszínen kijelölt (és állandósított), kiválasztott pontjainak meghatározását értjük. Itt tehát a fizikai földfelszínen egymástól néhányszor 10 km-es távolságokban kijelölt ponthalmaz (egy sok pontból álló poliéder sarokpontjai) térbeli helyzetének meghatározásáról van szó.

Általában ugyanezen pontok geoidi megfelelői szolgálnak a Föld *elméleti (matematikai) alakjának* – a geoidnak – a meghatározására.

Mindkét esetben a felület további pontjainak helyzetét további, sűrítő mérésekkel és/vagy számításokkal határozzuk meg.

A kiválasztott felületi pontok térbeli helyzetét általunk célszerűen megválasztott koordináta-rendszerben határozzuk meg.

16. Az alkalmazott koordináta-rendszerek

161. A földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A *Globális helymeghatározás* tantárgy és oktatási segédlete (http://www.agt.bme.hu/tantárgyak/globalis-helymeghatarozas/globalis-helymeghatarozas-segedlet.doc) keretében, az [1.2.]-ben már megismerkedtünk, és részletesen foglalkoztunk a vonatkoztatási rendszerekkel.

Emlékeztetünk arra, hogy a geodéziában azon anyagi pontok összességét és a hozzájuk rögzített koordináta-rendszert, amelyhez további pontok helyzetét és ennek megváltozását (mozgását) viszonyítjuk, vonatkoztatási rendszernek nevezzük A helymeghatározásban a szerint, hogy a viszonyítás alapját képező anyagi pontokat (az ún. keretpontokat) hol választjuk, különböző vonatkoztatási rendszereket használunk. Így beszélünk égi, földi és helyi vonatkoztatási rendszerekről. Az égi vonatkoztatási rendszerek keretpontjai távoli látható, vagy rádiócsillagok, a földi (globális) vonatkoztatási rendszereink koordináta-rendszerét a Föld tömegközéppontjához, vagy az egész Föld felszínén minél egyenletesebb eloszlásban kijelölt geodéziai fő alappontokhoz, míg a helyi vonatkoztatási rendszerek koordináta-rendszerét a földfelszín kisebb-nagyobb darabjain (ország, szomszédos országok, földrész területén) kijelölt egyes geodéziai alaphálózati pontokhoz kapcsoljuk.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy szaknyelvünkben használjuk a *vonatkoztatási rendszer* fogalmát az eddiginél *szűkebb* és *bővebb* értelmezésben is.

Gyakran, *tisztán geometriai értelemben,* vonatkoztatási rendszernek mondjuk valamely vonatkoztatási rendszernek csak magát a *koordináta-rendszerét* is. Ez a leszűkített értelmezés akkor lehet indokolt, amikor a teljes értelemben vett vonatkoztatási rendszernek a koordináta-rendszeren kívüli, más elemei az adott kérdésben nem játszanak szerepet.

Mivel a napi helymeghatározási gyakorlatban általában ez a helyzet, még ennél is általánosabban, ***helymeghatározó adatok viszonyítási alapjaként szolgáló bármely koordináta-rendszert*** is gyakran vonatkoztatási rendszernek mondunk.

Máskor a *vonatkoztatási rendszer* fogalmát *bővebb* értelmezésben is használjuk, amikor az eddigieken kívül, a ***geodézia feladatainak megoldásához*** (helymeghatározásainkhoz és a földi nehézségi erőtér leírásához) ***viszonyítási alapként használt egyéb további elemeket is beleértünk*** (*geodéziai vonatkoztatási rendszer* [34.]).

Megjegyezzük, hogy a *„vonatkoztatási rendszer”* fogalomra a magyar nyelvű szakirodalomban a *„vonatkozási rendszer”* kifejezést is kiterjedten használjuk. Mindkettő egyformán helyes.)

Földi (és földközeli) pontok geodéziai helymeghatározásainak alapvető koordináta-rendszere a földtesthez (a lehetőségig) kötött, így a Földdel együttforgó, geocentrikus elhelyezésű, a Kozmikus geodézia tantárgyban megismert, *X,Y,Z* *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer*. Ennek kezdőpontja (origója) egybeesik a Föld tömegközéppontjával (erre utal a „geocentrikus” jelző), *Z* tengelye pedig igen közel áll a Föld forgástengelyéhez.

A *Z* tengely és a forgástengely iránya folyamatosan változó, de (a közeli évtizedekben) 1″-nél kisebb szöget zár be egymással, mert – amint Geofizikából és Kozmikus geodéziából tudjuk – a Föld forgása nem a tehetetlenségi főtengelye körül indult meg, ezért a forgástengelynek és a földtestnek egymáshoz viszonyított helyzete folyamatosan változik, és létrejött a pólusmozgás jelensége. Azért, hogy a földi pontok koordinátái ne változzanak az idő folyamán ugyanilyen mértékben, koordináta-rendszerünk *Z* tengelyét nem a forgástengelyhez, hanem (csak ennek közelében) a *földtesthez* kötjük.

A +*X* tengely irányát megegyezéssel kiválasztott földfelszíni ponthoz (Greenwich), vagy pontokhoz kapcsoljuk.

A +*Y* tengely a +*X* és a +*Z* tengellyel jobbsodrású rendszert alkot.

Ezt a koordináta-rendszert a földfelszínen erre a célra kijelölt, különlegesen nagy megbízhatósággal meghatározott geodéziai alappontok (a vonatkoztatási *keretpontok*) és egyezményesen elfogadott koordinátáik valósítják meg a természetben. Ezen pontok száma az elmúlt száz évben néhányról több százra növekedett, és meghatározásuk a tudomány és a (mérés-) technika fejlődésével egyre megbízhatóbbá vált. Ennek megfelelően a *Nemzetközi Geodéziai Szövetség* (International Assotiation of Geodesy = IAG, http://www.iag-aig.org/) javaslataira a *Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió* (International Union of Geodesy and Geophysics = IUGG, http://www.iugg.org) az idő folyamán ennek a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszernek egyre pontosabb, újabb megvalósításait vezette be a gyakorlat számára. Jelen keretek között ennek a fejlődésnek csak a legutóbbi két állomását tárgyaljuk.

A múlt század elejei korábbi megoldások után 1967-től az IUGG ajánlására a geodézia a ***CIO-BIH rendszer****nek* is nevezett ***Egyezményes (Közepes) Földi Rendszernek*** (Conventional Terrestial System = **CTS**), mint a Földhöz kötött vonatkoztatási rendszernek a koordináta-rendszerét használta. Ezt mintegy 50 geodéziai alappont (keretpont) egyezményesen elfogadott koordinátái valósították meg. Ennek +*Z* tengelye a forgástengely 1900.0-1906.0 közötti közepes helyzeteként számított *Egyezményes Nemzetközi Kezdőpont* (Conventional International Origin = CIO) iránya, *XZ* síkja a *BIH kezdőmeridiánsík*nak is nevezett *Greenwichi Közepes Szintfelületi Meridiánsík* (Greenwich Mean Astronomic Meridian). Ezzel a rendszerrel korábbi munkarészekben és szakirodalmi művekben még gyakran találkozunk.

Az IUGG 1991-ben vezette be a jelenleg általánosan használt ***Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszert*** (International Terrestrial Reference System = **ITRS** http://www.iers.org/iers/pc/itrs/). Az ITRS koordináta-rendszere kezdőpontjának (origójának) és alapirányainak a földtesthez viszonyított helyzetét a *Nemzetközi Földforgás és Vonatkoztatási Rendszerek Szolgálat* (International Earth Rotation and Reference Systems Service = IERS, http://www.iers.org/) keretében mintegy 300 helyen működő állomás több mint 550 pontjának nemzetközi megegyezéssel elfogadott koordinátái (megbízhatóság ±0,5-2,0 cm) és mozgássebessége (megbízhatóság ±1-3 mm/év) rögzítette a természetben. Ezek alkotják a *Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Keretpontokat* (International Terrestrial Reference Frame = ITRF, http://lareg.ensg.ign.fr/ITRF/). Ezt rendszeresen bővítik és javítják, és ma már beszélünk ITRF93, ITRF97 és ITRF2000-ről. (Ez utóbbit már mintegy 500 állomás több mint 800 pontja alkotja.) Így, az ITRS koordináta-rendszerét egyre nagyobb megbízhatósággal tudjuk keretpontjainkhoz kötni. Ha helymeghatározásaink során további pontokat határozunk meg az ITRS koordináta-rendszerében, akkor helyzetüket a koordináta-rendszeren keresztül tulajdonképpen az ITRF (keret-) pontokhoz viszonyítva határozzuk meg, őket beillesztjük a keretpontok közé.

Az ITRS koordináta-rendszere +*Z* tengelyének így rögzített iránya az *IERS Vonatkoztatási Pólushelyzet* (IERS Reference Pole = IRP) iránya, az *XZ* síkja az *IERS Vonatkoztatási Meridiánsík* (IERS Reference Meridian = IRM), a +*Y* tengelye a +*X és a* +*Z* tengellyel jobbsodrású rendszert képez, és a rendszer *O* kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontja (± néhány milliméterre). (Megjegyezzük, hogy az IRP és a korábban használt CIO pólushelyzet iránya csak mintegy ±0,03″-nél kisebb mértékben tér el egymástól.)

Ez a koordináta-rendszer a *Föld tájékozási paramétereinek* (Earth Orientation Parameters = EOP, http://www.iers.org./iers/products/eop/) felhasználásával lehetővé teszi, hogy a *valódi* (pillanatnyi) *forgástengelyen* keresztül bármikor megadjuk a földtest térbeli helyzetét (tájékozását), és vele együtt bármely meghatározott földi pont koordinátáit a térben rögzített *Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Rendszer* (International Celestial Reference System = ICRS) koordináta-rendszerének alapirányaihoz és rajtuk keresztül ennek keretpontjaihoz, a távoli rádiócsillagokhoz (kvazárokhoz) viszonyítva.

Megemlítjük, hogy a mesterséges holdas helymeghatározásokhoz már 1960-tól ***Geodéziai Világrendszer*** (World Geodetic System = **WGS**) elnevezésű vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszerét használjuk. Ez magától értetődően geocentrikus elhelyezésű (hiszen a mesterséges hold a Föld tömegközéppontja körüli pályán kering), és tengelyirányai elvileg megegyeznek az 1967-ben bevezetett, már említett, *CIO-BIH rendszer* koordináta-rendszerének alapirányaival, és a természetben a mesterséges hold követő állomáshálózat pontjainak (a WGS keretpontoknak) elfogadott koordinátái valósítják meg. Ezt több lépcsőben finomították, és ma a WGS84 jelű változata használatos (pl. a GPS-mérésekben). Az ebben adott koordináták, tehát *elvileg* nem ITRS koordináták, azonban az alapirányok csekély különbségét és a rendszerek megvalósításának véges megbízhatóságát (±0,05 m) figyelembe véve mondhatjuk, hogy *ezen a megbízhatósági szinten* a WGS84 koordináták *gyakorlatilag* az ITRS koordináták megvalósulásának tekinthetők.

Az európai országok annak érdekében, hogy az európai tábla mozgása kisebb mértékben befolyásolja a rajta fekvő állomások (alappontok) koordinátáit, az 1980-as évek végétől az európai táblához kötött ***Európai Földi Vonatkoztatási Rendszert*** (European Terrestrial Reference System 1989 = **ETRS89**) vezettek be. Koordináta-rendszerének gyakorlati megvalósulása az európai állomásoknak (az *Európai Földi Vonatkoztatási Keretpontoknak = ETRF*, http://www.euref-iag.net/) folyamatos (permanens) GPS-hálózati mérése és az IERS tevékenysége alapján számított koordinátái és mozgássebessége. Az állomáskoordinátákat a bevezetésükkor úgy határozták meg, hogy ETRS89-es koordinátáik azonosak legyenek az ITRF89-es koordinátáikkal. Következésképpen az ETRS koordináta-rendszerének kezdőpontja és koordináta-irányai a rendszer bevezetésekor (1989) azonosak voltak az ITRS megfelelő elemével. Azóta az állomások – az európai tábla mozgásának megfelelően – folyamatosan, kis mértékben (mintegy 3 cm/év sebességgel ÉK irányban) eltolódnak az ITRS koordináta-rendszeréhez viszonyítva. Ugyanakkor ezeknek (az európai) pontoknak az ETRS koordinátáit változatlanul tartják, ami azt jelenti, hogy az ETRS koordináta-rendszere a Föld tömegközéppontjához képest folyamatosan, párhuzamosan eltolódik. Ezért az ETRS koordináta-rendszere ma már ún. *kvázi-geocentrikus* elhelyezésűvé vált. Az európai és a nemzetközi földi rendszer kapcsolata mintegy ±1 cm-re megbízható.

Térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a meghatározott pontok helyzetét egyre gyakrabban az $\mathbf{r}(X,Y,Z)$ ***helyvektorukkal*** adjuk meg. Ehhez közvetlen mérési módszerünk van a mesterséges holdakra végzett geodéziai mérésekkel (mint pl. a GPS). A belőlük kapott helyvektorok (mint már említettük) gyakorlatilag a *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer ITRS megvalósulására vonatkoznak.*

Kisebb területek, mint pl. egy-egy ország alappont-hálózatának meghatározásakor korábban általános volt ***helyi vonatkoztatási rendszer*** létesítése. Ennek keretpontjai a helyi (nemzeti) geodéziai alaphálózat egyes kiválasztott (általában csillagászati-geodéziai) pontjai . Koordináta-rendszerének helyzetét ezen pontok valamilyen célszerűséggel megválasztott koordinátái jelölik ki. Ez esetben is mindig törekedtek arra, hogy a koordináta-irányok párhuzamosak legyenek a nemzetközi földi rendszer alapirányaival, és az egyes rendszerek csak a kezdőpontjuk (origójuk) $\mathbf{r}_0$ eltolásával különbözzenek egymástól és a nemzetközi földi rendszertől. Ez azonban csak a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben sikerült, így a valóságban mindig adódott csekély (általában 1″-nél nem nagyobb) elforgatás is a tengely-irányok között (ε_x, ε_y, ε_z). (Ilyen pl. a magyarországi geodéziai alappont-hálózat HD72 jelű vonatkoztatási rendszerének koordináta-rendszere is.) Az ilyen helyi koordináta-rendszerekben megadott ${}_{\mathrm{h}}\mathbf{r}$ helyvektorok egymásba és/vagy a nemzetközi földi rendszerbe (ITRS-be) az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{R}_x(\varepsilon_x)\,\mathbf{R}_y(\varepsilon_y)\,\mathbf{R}_z(\varepsilon_z)\,{}_{\mathrm{h}}\mathbf{r} \qquad (16.1)$$

geometriai összefüggéssel átszámíthatók. Ebben **R** forgatási mátrixokat jelöl. Ilyen átszámításokkal későbben fogunk részletesebben megismerkedni [4.].

Az $\mathbf{r}(X,Y,Z)$ *helyvektorok* tisztán *geometriai* rendszerben teljes körű térbeli helymeghatározást adnak az adott koordináta-rendszerben. A helyvektorok használata a mesterséges holdas helymeghatározások (pl. GPS) egyre szélesebb körű alkalmazásával mindjobban elterjed. Földi pontok helyzetének meghatározásán kívül, használjuk őket a Föld körül keringő mesterséges holdak pályapontjainak megadására is. Hátrányuk, hogy pusztán a pontok egymáshoz (és a koordináta-rendszer kezdőpontjához, valamint tengelyeihez) viszonyított geometriai helyzetét mutatják, de a pontoknak a földi nehézségi erőtér szintfelületeihez (pl. a tengerszinthez) viszonyított (magassági) helyzetét nem jellemzik, továbbá a felhasználók széles köre számára nem szemléletesek.

Feladatok:

- Milyen a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer?
- Mik a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer legutóbbi gyakorlati megvalósulásai?
- Vázoljuk fel a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszert és valamely helyi elhelyezésű derékszögű koordináta-rendszert!

162. Felületi koordináta-rendszerek

A korábban kialakult (hagyományos) mérési módszereink (vízszintes és magassági szögmérések, távolságmérések, szintezések és nehézségi mérések) mérési eredményeinek feldolgozásához, sőt gyakran a mesterséges holdas módszerekkel kapott helyvektorok (térbeli derékszögű koordináták) további felhasználásához is − a Föld alakjához célszerűen választott felületre vonatkozó − *felületi koordinátákat* használunk. Ezek a felhasználó számára a szemléletesség szempontjából is előnyösebbek.

Ekkor a választott felületet *vonatkoztatási* vagy *alapfelületnek* nevezzük, és a térbeli pontokat valamilyen célszerű *vetítővonalla*l erre az alapfelületre vetítjük. Így kapjuk a pont *alapfelületi megfelelőjét*. A pont térbeli helyzetének megadásához meghatározzuk alapfelületi megfelelőjének két koordinátáját (*vízszintes koordináták*) és a pontnak az alapfelülettől a vetítővonalon mért távolságát (*magasság*).

162.1. Ellipszoidi felületi koordináták

A geodéziai gyakorlatban a földi pontok helyzetének megadására kiterjedten használjuk a földi koordináta-rendszer kezdőpontjára (a Föld tömegközéppontjára) és koordináta-tengelyeire illesztett, vagy ettől párhuzamosan eltolt (ún. helyi elhelyezésű), *a* és *b* méretű *E(a,b)* forgási ellipszoid alapfelülethez, az ún. *vonatkoztatási ellipszoidhoz* kapcsolódó *ellipszoidi felületi koordinátákat*, közöttük első sorban az **ellipszoidi földrajzi koordinátákat;** a

φ ellipszoidi földrajzi szélességet, a

λ ellipszoidi földrajzi hosszúságot, valamint a

h ellipszoid feletti magasságot.

A P ponton átmenő ellipszoidi normálison sorozott síkokat *ellipszoidi vertikális síkoknak* és közülük azt, amelyik az ellipszoid kistengelyét is tartalmazza, a P pont *ellipszoidi meridiánsíkjának* nevezzük.

Ellipszoidi földrajzi szélességen értjük a P ponton átmenő ellipszoidi felületi normálisnak a kistengelyre merőleges síkkal bezárt szögét. (Ezt az ellipszoidi egyenlítő síktól észak felé pozitívnak, dél felé negatívnak tekintjük). Az ellipszoid kistengelyének iránya elvben megegyezik (vagy legalább párhuzamos) a földi koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása +*Z* tengelyének (jelenleg az *IRP,* korábban a *CIO*) irányával.

Ellipszoidi földrajzi hosszúságnak a P ponton átmenő eIlipszoidi meridiánsík és a kezdő ellipszoidi meridiánsík által bezárt szöget nevezzük és ezt kelet felé tekintjük pozitívnak. A kezdő ellipszoidi meridiánsík elvben párhuzamos a földi koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása +*XZ* síkjával (jelenleg az *IRM,* korábban a *BIH*) kezdő meridiánsíkkal.

Az *ellipszoid feletti magasságon* a P ponton átmenő ellipszoidi felületi normálisnak az ellipszoid felszíne és a P pont közötti szakaszát értjük.

A φ és a λ ellipszoidi földrajzi koordináták geometriai értelemben a ponton átmenő ellipszoidi felületi normális térbeli helyzetét adják meg az ellipszoid kistengelyéhez és az ellipszoidi kezdő meridiánsíkhoz viszonyítva. Belőlük az ellipszoidi normális irányát kijelölő **m** egységvektor összetevői (iránykoszinuszai) az

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } |\mathrm{m}| = 1 \qquad (162.1)$$

összefüggéssel számíthatók.

Az ellipszoid felszínén a φ = *állandó* és a λ = *állandó* értékű helyek az ellipszoid *szélességi,* ill. *hosszúsági vonalait* alkotják. Ezek egymással ortogonális (egymásra merőleges) görbesereget képeznek, amiket ellipszoidi *felületi koordináta-vonalaknak* is tekinthetünk. Ilyen értelmezésben beszélhetünk ellipszoidi felületi *görbe vonalú koordináta-rendszerről.*

Mondottuk, hogy a felületi koordináta-rendszerek bevezetése a pontok helyének térbeli meghatározását két részre osztja. A P ponton átmenő ellipszoidi normális, *mint vetítővonal*, az ellipszoid felszínén kidöfi a P pont P″ ellipszoidi megfelelőjét. Ennek φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátái azonosak a P pontéval (hiszen azonos felületi normálison fekszenek). Ők a P pont ún. *vízszintes helyzetét* adják meg. A P pont *magassági helyzetét* ebben a rendszerben (harmadik koordinátaként) a *h* ellipszoid feletti magasság határozza meg.

Az ellipszoid feletti magasságról tudni kell, hogy pusztán a pontok geometriai helyzetét jellemzi, de – a helyvektorokhoz hasonlóan – ez sem mutatja a földi nehézségi erőtér szintfelületeihez (a tengerszinthez) viszonyított elhelyezkedésüket (így például széleskörű felhasználásra szolgáló térképi ábrázolásra, építő, vízrajzi és egyéb tevékenységekhez közvetlenül nem alkalmas).

Az ellipszoidi földrajzi koordináták és az ellipszoid feletti magasság adathármasa, az ellipszoid geometriai jellemzőivel együttesen, a helyvektorral egyenértékű teljes körű térbeli helymeghatározást ad tisztán *geometriai* rendszerben. Kapcsolatuk:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left[\left(1-e^2\right)N+h\right]\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (162.2)$$

ahol

$$e^2 = \frac{a^2 \quad b^2}{a^2} \qquad \text{és} \qquad N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

az ellipszoid (első) numerikus excentricitásának négyzete, ill. harántgörbületi sugara. (A feladat visszafelé, csak fokozatos közelítéssel oldható meg.)

A φ,λ,h ellipszoidi koordináta-hármas mesterséges holdakra végzett mérésekből átszámítással, vagy a hagyományos földi geodéziai (vízszintes, magassági és gravimetriai) alaphálózati mérésekkel (beleértve a csillagászati geodéziai munkákat is) határozható meg.

Megemlítünk ritkábban alkalmazott még két ellipszoid felületi koordináta-hármast.

A földfelszíni P pont *ellipszoid felszínén fekvő* P" ellipszoidi megfelelője helyzetének megadására a térbeli poláris koordináta-rendszert is használhatjuk. Ez esetben a P" ellipszoid felületi pontnak térbeli helyzetét a

ψ ellipszoidi **geocentrikus szélesség**, a

λ ellipszoidi földrajzi hosszúság és az

$r_{P''}$ ellipszoidi helyvektor hossza

határozza meg. Az ellipszoidi földrajzi és a geocentrikus szélesség $\varphi - \psi$ különbsége a geodéziai gyakorlatban használt ellipszoidok esetén 11’-nél kisebb.

Megjegyezzük, hogy itt a *geocentrikus szélesség* elnevezés bizonyos fokig félrevezető lehet. Ebben az értelemben használva a fogalmat ugyanis az ellipszoid (és vele együtt a koordináta-rendszerünk) általános elhelyezésű is lehet, és a *geocentrikus* jelző valójában csak arra utal, hogy a szóban lévő szöget az ellipszoid geometriai középpontjában kell értelmezni (szemben az ellipszoidi *földrajzi* szélesség szögével). Ettől az egyetlen esettől eltekintve, a *geocentrikus* koordinátákon általában olyan koordináta-rendszerre vonatkozó helymeghatározó adatokat értünk, amelynek kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontjával egybeesik.

Az ellipszoid *felszínén lévő* P" (vetületi) pont helyzetét az ellipszoidon az

u ellipszoidi **redukált szélesség**, a

λ ellipszoidi hosszúság és az

r_P" ellipszoidi helyvektor hossza

segítségével is megadhatjuk. Az ellipszoidi földrajzi és a redukált szélesség $\varphi - u$ különbsége nem haladja meg az 5,5'-et.

Itt jegyezzük meg, hogy *vonatkoztatási ellipszoid* méretei (vagy mérete és alakja) elvileg tetszés szerint megválasztható, azonban célszerűségi okokból a geodézia arra törekszik, hogy az ellipszoid a Föld (pontosabban a geoid) alakjához lehető legjobban simuljon. Az ismeretek és a méréstechnika fejlődésével több különböző ilyen ellipszoid méretet határoztak meg az idő folyamán [3.].

Az egyes nemzeti geodéziai alaphálózatokban különböző méretű, alakú és helyi (nem geocentrikus) elhelyezésű ellipszoidra vonatkozó koordinátákkal is találkozunk. Ezeket koordináta-átszámítással lehet egymásba, és/vagy a *Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszerbe (ITRS)* átszámítani[43.].

Az eddigiekből az is következik, hogy ugyanazon természetbeni pontnak számszerűen egymástól kissé különböző ellipszoidi koordinátái lehetnek, attól függően, hogy milyen méretű, alakú, elhelyezésű ellipszoidra vonatkoznak [42.]. Ezért minden ellipszoidi koordinátához az előbb felsorolt adatokat meg kell adni.

Végül megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalom az ellipszoidi földrajzi koordinátákat általában *„geodéziai koordinátáknak”* nevezi. Ezzel meghatározásuk geodéziai módszereire utalnak.

Feladatok:

- Vázoljuk fel az ellipszoidi felületi koordináták értelmezését! Mik az ellipszoidi szélességi és hosszúsági vonalak? Számítsuk ki a P ponton átmenő ellipszoidi normális **m** egységvektorát.
- Értelmezzük az ellipszoidi egyenlítő fogalmát!
- Vázoljuk fel a földi derékszögű koordináta-rendszert, a geocentrikus és valamely helyi elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidot!

162.2. A szintfelületi földrajzi koordináták

A földi pontok térbeli helyzete megadásának harmadik módja a *földi nehézségi erőtérhez* (ennek szintfelületeihez és függővonalaihoz, gyakorlatilag ez utóbbinak érintőjéhez (a *helyi függőleges* irányához) kapcsolódik. Ez esetben a pont térbeli helyzetét a

Φ szintfelületi földrajzi szélességgel,

Λ szintfelületi földrajzi hosszúsággal és

W poteciálértékével, ill. a gyakorlatban a pont $W-W_0$ geopotenciális mérőszámával, vagy ebből származtatható H (geoid feletti) magasságával jellemezzük. (Ez utóbbi fogalmakat később tárgyaljuk [53.]). Velük kapcsolatban most csak annyit jegyzünk meg, hogy bármely (geometriai, vagy fizikai) elven, bármilyen módszerrel is végezzük a földi pontok helymeghatározását, végeredményként a felhasználó számára minden esetben a szintfelületek közötti (tengerszint feletti) magasságokat kell megadnunk. Ezt követi a szabad folyadékfelszín, ezt igényli minden építési tevékenység, ezért ezt ábrázolják a térképeink, stb. A magassági (függőleges) helyzet megadására végül is ezeket kell kiszámítani a helyvektorral, vagy az ellipszoid feletti magassággal megadott térbeli helyzetből is. Ez teszi a mesterséges holdas helymeghatározások korában is *elkerülhetetlenül szükségessé* a geoid – mint magassági alapszintfelület – részletes meghatározását.

A *Φ szintfelületi földrajzi szélesség* a helyi függőleges iránynak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulása [161.] Z tengelyére (jelenleg az IRP, korábban a CIO irányára) merőleges síkkal (vagy az X,Y síkjával) bezárt szöge.

A *Λ szintfelületi földrajzi hosszúság* a helyi szintfelületi meridánsíknak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulásának *X,Z síkjával,* (jelenleg az IRM, korábban a BIH) kezdő szintfelületi meridiánsíkkal bezárt szöge.

A helyi *szintfelületi meridiánsík* a szóban lévő pont helyi függőlegesén sorozott síkok közül az, amelyik párhuzamos a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) Z tengelyével. A szintfelületi meridiánsíkot tehát, a szóban lévő pont helyi függőlegese és ugyanezen pontban a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) Z tengelyével párhuzamos egyenes feszíti ki.

A *Φ* és a *Λ szintfelületi földrajzi koordináták* egy egyenesnek, a földi pont *helyi függőlegesének* (a ponton átmenő szintfelületre merőleges iránynak, felületi normálisnak) térbeli helyzetét adják meg a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) alapirányaihoz viszonyítva.

A helyi függőleges **n** egységvektorának összefüggése a szintfelületi földrajzi koordinátákkal:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{g} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \text{ ahol } |\mathbf{n}| = 1. \qquad (161.3)$$

Az előbbi fogalom-meghatározásokban a valóságban mindig a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *valamelyik gyakorlati megvalósulását* (jelenleg az ITRS, korábban, pl. a CIO-BIH rendszer tengely-irányait [161.]) értjük. Így ugyanazon földfelszíni pontnak egyidejűen – egymástól parányi mértékben – eltérő szintfelületi földrajzi koordinátái lehetnek. Különbségük mértéke elvileg akkora, amennyire a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer gyakorlati megvalósulásai egymástól eltérnek. Mivel a gyakorlati munkarészekben különböző időkben, különböző rendszerekre vonatkozó szintfelületi földrajzi koordinátákkal találkozunk, minden koordinátához mindig meg kell adni, hogy a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer melyik megvalósulására (pl. ITRS, vagy CIO-BIH, vagy esetleg valamelyik még korábbi rendszerre) vonatkoznak.

A szintfelületeken a *Φ = állandó* és a *Λ = állandó* értékű helyek a szintfelületi *szélességi,* ill. *hosszúsági vonalakat* alkotják. Ezek egymással ortogonális (egymásra merőleges) görbesereget képeznek, amiket *szintfelületi koordináta-vonalaknak* is tekinthetünk. Ilyen értelmezésben beszélhetünk *szintfelületi görbe vonalú koordináta-rendszerről.*

Itt is megjegyezzük, hogy a szintfelületi koordináta-rendszer alkalmazása is a pontok helyének térbeli meghatározását két részre osztja. A szintfelületi földrajzi koordináták a pont *vízszintes helyzetét* adják meg, míg a függőleges helyzetüket később tárgyalandó valamelyik *magassági mérőszámmal* [53.] jellemezzük. Ez a megosztás tulajdonképpen megfelel a geodéziai mérési gyakorlatnak, hiszen egészen más módszerekkel határozzuk meg a vízszintes helyzetet jellemző koordinátákat, mint a magasságokat.

A Φ, Λ szintfelületi földrajzi koordináták szabatos meghatározása a Kozmikus geodézia tantárgy keretében megismert csillagászati-geodéziai módszerekkel, csillagészleléssel (földrajzi helymeghatározással) lehetséges. Nagy előnyük, hogy a Föld bármely helyén, egymástól függetlenül meghatározott koordináták mindegyike ugyanazon koordináta-rendszerre, a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerre (pontosabban ennek ugyanazon megvalósulására, pl. jelenleg az ITRS koordináta-rendszerére) vonatkoztatható. Több geodéziai alaphálózati pont szintfelületi földrajzi koordinátáinak ismerete lehetővé teszi a vonatkoztatási ellipszoid méretének, alakjának, térbeli elhelyezésének és tájékozásának, valamint a szintfelületek (elsősorban a geoid) alakjának nagypontosságú meghatározását. (Ezekkel a feladatokkal később foglalkozunk [3.], [4.], [5.])

Ugyanakkor tudnunk kell, hogy a szintfelületek túl bonyolult felületek ahhoz, hogy a szintfelületi földrajzi koordinátákból, pl. a pontok *felületi távolságát* kiszámíthassuk. Ugyancsak nem tudjuk belőlük (legalábbis jelenleg) a pont teljes térbeli helyzetét jellemző *helyvektorát* meghatározni.

Megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalom a Φ, Λ szintfelületi földrajzi koordinátákat általában „*csillagászati koordinátáknak*” nevezi, utalva a meghatározásuk módjára.

Feladatok:

- Vázoljuk fel a szintfelületi földrajzi koordináták értelmezését!
- Számítsuk ki a helyi függőleges irányba mutató **n** egységvektor derékszögű összetevőit!
- Értelmezzük a szintfelületi hosszúsági és szélességi vonalak, valamint a szintfelületi egyenlítő fogalmát. Miért nem síkgörbék ezek?
- Miért lesznek ugyanazon pontnak különböző szintfelületi koordinátái az ITRS-ben és a CIO-BIH rendszerben?

162.3. A gömbi koordináták

Ha a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjára (a Föld tömegközéppontjára) képzeletben közös középpontú (koncentrikus) gömböket illesztünk, akkor a meghatározandó pontunk térbeli helyzetét a rajta átmenő gömbre vonatkozó*gömbi koordinátákkal* is megadhatjuk. Ebben a rendszerben a

ϑ gömbi pólustávolság, vagy ψ gömbi szélesség, a

λ gömbi hosszúság és az

r gömbsugár, vagy a pont helyvektorának hossza

jellemzi a pont helyzetét. Ebben a rendszerben a felületi normálisok *gömbsugarak.*

A ϑ *gömbi pólustávolság* a P ponton átmenő gömbsugárnak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer Z tengelyével (ennek valamelyik gyakorlati megvalósulásával) bezárt szöge.

A ψ *gömbi szélesség* a gömbi pólustávolság kiegészítő szöge, azaz $\psi = 90° - \vartheta$.

A λ *gömbi hosszúság a P* pont gömbi meridiánsíkjának a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer XZ síkjával (a kezdő meridiánsíkkal) bezárt szöge.

A *gömbi meridiánsík* a P ponton átmenő gömbsugár és a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *Z* tengelye által kifeszített sík.

A P ponton átmenő gömb felületén a ϑ = *állandó,* vagy a ψ = *állandó* értékű helyek a *gömbi szélességi vonalak (paralelkörök),* míg a λ = *állandó* helyek a *gömbi hosszúsági vonalak.* Ezek a gömbfelületen egymásra merőleges (ortogonális) görbesereget képeznek, amit *gömbfelületi* (görbe vonalú) *koordináta-rendszernek* is tekinthetünk. A gömbi hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjában, a ϑ (vagy ψ) és λ koordinátájú hely a P pont gömbfelületi helye, a koordinátapárt a pont *gömbfelületi koordinátáinak* nevezzük.

A gömbi koordinátákat közvetlenül mérni nem tudjuk, csak számítani tudjuk őket pl. a térbeli derékszögű, vagy az ellipszoidi koordinátákból. Használni fogjuk őket egyes fontos függvénykapcsolatok felállításakor független változóként.

Feladatok:

- Vázoljuk fel a gömbi koordináták értelmezését!

- Értelmezzük a gömbi egyenlítő fogalmát!

3. Hét

2. A FELSŐGEODÉZIA MÉRÉSI MŰVELETEI ÉS EREDMÉNYEIK

A felsőgeodézia mérési műveletei azok a geodéziai mérési műveletek, amelyek eredményei a földalak meghatározásához felhasználhatók. Ezek részben geometriai, részben fizikai jellegű mennyiségek meghatározását szolgálják.

21. A felsőrendű vízszintes é

s magassági szögmérés

Az álláspontban helyesen felállított teodolit állótengelye a helyi függőleges irányával esik egybe. Ekkor a műszer vízszintes köre a helyi vízszintes síkkal lesz párhuzamos. Műszerünk a Geodézia és a Kozmikus geodézia tantárgyból már ismert *helyi szintfelületi (horizonti) koordináta-rendszert* valósítja meg. Ebben mérni tudjuk a külső pontok felé haladó irányok vízszintes vetülete által bezárt β' ún. *vízszintes szögeket*. (Mérésükkor a légköri sugártörés vízszintes összetevőjének hatása megfelelő mérési módszerrel általában elhanyagolható mértékűre csökkenthető.) A korszerű vízszintes szögmérés megbízhatósága mintegy ±0,2÷0,4" középhibával jellemezhető.

A vízszintes szögmérés eredményeit felhasználás előtt – a Geodéziai alaphálózatok tantárgy keretében megismert – megfelelő módszerrel (a j_i (i = 1, 2, 3) javítással) a koordináta-számítás céljára megválasztott vonatkoztatási ellipszoidra vetítjük. Így a P álláspont P″ ellipszoidi megfelelőjében, az ellipszoid felületén, a mért külső pontok ellipszoidi megfelelőjére menő ellipszoidi geodéziai vonalak végérintője közötti szögeket kapunk. Ezeket használjuk fel az ellipszoidi felületi koordináták számításához.

Mérni tudjuk továbbá a külső pontok felől a távcsőbe érkező fénysugár terjedési görbéje végérintőjének (beérkezési irányának) a *helyi függőlegessel bezárt szögét*. Ez utóbbi az irány *Z szintfelületi zenitszöge,* mely tartalmazza a légköri sugártörés (refrakció) hatását is. A refrakció a zenitszög mérését terhelő egyik legveszélyesebb hibaforrás, aminek teljes kiküszöbölése egyelőre megoldatlan. Ezért a zenitszögek mérési megbízhatósága kisebb a vízszintes szögmérésénél. A zenitszög mérésének irányzási és leolvasási középhibája együttesen mintegy ± 0,3÷0,5" középhibával jellemezhető, amihez még hozzájárul a refrakciós hatás bizonytalansága.

Ha a szintfelületi zenitszöget megjavítjuk az álásponton átmenő ellipszoidi normálisnak a helyi függőlegessel bezárt szögével (a függővonal-elhajlással [322.]), akkor a mért iránynak az *ellipszoidi zenitszögét* kapjuk.

A szintfelületi, ill. az ellipszoidi zenitszögeket trigonometriai magasságmérés [532.] számításában használjuk fel.

22. A szabatos távolságmérés

Módszerét tekintve a távolság-meghatározás, vagy

- távmérés, vagy
- hosszmérés.

Távméréskor fizikai elven működő távmérő műszer segítségével meghatározzuk az elektromágneses hullám terjedési görbéjének s' ívhosszát a távolság két végpontját kijelölő A és B pont között. A nyert mérési eredményből a terjedési görbe alakjának figyelembevételével először az $s'' = \overline{AB}$ húrhosszat számítjuk ki, majd ezt a geoidra, illetve a vonatkoztatási ellipszoidra átszámítva határozzuk meg az A és a B pont geoidi illetve ellipszoidi megfelelője közötti s_o illetve s felületi ívhosszat, a geoidi, ill. az ellipszoidi *geodéziai vonal hosszát.*

A felsőgeodéziában mért távolságok néhányszor 10 km nagyságrendűek. A távmérésben elérhető megbízhatóság mintegy

$$m_s = \pm(1 \div 20\ \text{mm} + (1 \div 5) \cdot 10^{-6}\ s^{[\text{km}]})$$

középhibával jellemezhető.

Hosszmérést a felsőgeodéziában ma már gyakorlatilag nem végzünk.

23. A nehézségi erőtér mérése

Megfelelő mérőeszközzel a Föld fizikai felszínén (vagy ennek közelében) mérni tudjuk a g **nehézségi térerősséget**, (vagy a szabadesés gyorsulását) illetve szomszédos pontok között a *dg nehézségi különbséget*. Szélső pontosságú méréseket csak szilárdan alátámasztott műszerrel, azaz a szárazföldeken tudunk végezni, de kisebb megbízhatósággal nehézségi méréseket a tengereken, sőt a külső térben (pl. repülőgépen vagy űreszközökön) is tudunk végezni.

A nehézségi mérések elérhető megbízhatósága

szárazföldeken	$\pm 0{,}1 \div 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ N/kg,	azaz	$\pm 0{,}1 \div 0{,}2\ \mu\text{ms}^{-2}$,
tengereken	$\pm\ 10 \div 100 \cdot 10^{-6}$ N/kg,	azaz	$\pm 10 \div 100\ \mu\text{ms}^{-2}$,
levegőben (átlagértékek)	$\pm\ 50 \div 100 \cdot 10^{-6}$ N/kg,	azaz	$\pm\ 50 \div 100 \cdot \mu\text{ms}^{-2}$

középhibával jellemezhető.

Megjegyezzük, hogy a geodéziai gravimetriai gyakorlatban az SI rendszer bevezetése után is kiterjedten használják a *Galilei* nevéhez kapcsolt mértékegységet, a „Gal"-t. Kapcsolata az SI rendszerrel:

$$1\ \text{Gal} = 10^{-2}\ \text{ms}^{-2},$$

$$1\ \text{mGal} = 10^{-5}\ \text{ms}^{-2} = 10\ \mu\text{ms}^{-2},$$

$$1\ \mu Gal = 10^{-8}\ ms^{-2} = 10^{-2}\ \mu ms^{-2}.$$

A nehézségi mérések eredményéből minden esetben levonjuk az árapálykeltő erőhatás méréskori értékét. Az így kapott nehézségi térerősséget számos geodéziai feladat megoldásához használjuk, mégpedig a feladattól függően, vagy a földfelszíni P pontbeli g_P értéket, vagy ennek a geoidi P′ pontba – megfelelő modell [333.] segítségével – átszámított $g_{P'}$ értékét. Ezekkel a feladatokkal a későbbiekben részletesen fogunk foglalkozni.

Eötvös-féle torziós ingával vagy más gradiométerrel mérhetők a nehézségi erőtér **potenciálja második differenciálhányadosainak** többsége.

Az Eötvös-inga szilárd alátámasztást igényel, így csak a szárazföldeken használható. A korszerű gradiométerek, már mozgó járműveken (földi, légi és űreszközökön) is lehetővé teszik a második deriváltak mérését. Jelenleg mérhetők a

$$(W_{yy} - W_{xx}),\ W_{xy},\ W_{xz} \text{ és } W_{yz}$$

második deriváltak. Az elérhető szélső megbízhatóság Eötvös-ingával $\pm 1 \div 2 \cdot 10^{-9}\ s^{-2} = \pm 1 \div 2$ E (Eötvös egység) középhibával jellemezhető. A korszerű gradiométerek megbízhatósága1÷2 nagyságrenddel még jobb is lehet.

Más módszerrel meghatározható még a W_{zz} második derivált is (a nehézségi térerősség *dg/dz* függőleges gradiense). Ennek megbízhatósága mintegy ±10 E, de a módszerek fejlődésével várhatóan javulni fog a közeli jövőben.

A mért gradiens értékeket a nehézségi erőtér eloszlásának, a szintfelületek – közöttük a Föld matematikai (elméleti) alakjának, a geoidnak – a meghatározásához használjuk fel.

A nehézségi erőtér mérésének részleteivel a *Geofizikai alapismeretek,* továbbá a mesterképzésben a *Geofizika* és a *Gravimetria* tantárgy foglalkozik.)

24. A szabatos szintezés

Szintezéssel egymáshoz közel fekvő földfelszíni pontok ΔH_i magasságkülönbségét, azaz a rajtuk átmenő *szintfelületek függőleges távolságát* tudjuk meghatározni. Ennek elérhető megbízhatósága mintegy ±0,3÷1,0 mm/km középhibával jellemezhető.

Nagyobb távolságokon azonban kitűnik, hogy a szintfelületek nem párhuzamossága miatt nem a közöttük lévő távolság, hanem a potenciálkülönbségük állandó. Ezért a felsőgeodéziai célú (nagy területre kiterjedő) szabatos szintezést a szintezés útvonala mentén megfelelő sűrűségben végzett g_i *nehézségi mérésekkel kell kiegészíteni.* A kétféle mérés eredményéből a

$$\sum_{A}^{B} g_i\,\Delta H_i = W_A - W_B = \Delta W_{AB}$$

összefüggés alapján az A és a B végpont *potenciálkülönbsége* határozható meg nagy megbízhatósággal, minden elvi feltevés nélkül (J/kg-ban).

Itt jegyezzük meg, hogy potenciálértékeket külön-külön egyelőre sajnos nem tudunk mérni, mérési eredményeinkből csak különbségüket, a potenciálkülönbséget tudjuk meghatározni. A földfelszíni pontoknak a geoidhoz, mint magassági alapszintfelülethez viszonyított potenciálkülönbsége a pont magassági helyzetének alapvető mérőszáma.

Belőle tudunk hosszegységben kifejezett magassági mérőszámokat kiszámítani különböző fizikai modellek segítségével [53.].

25. A kozmikus geodéziai mérések

A kozmikus geodéziai módszerek segítségével a Földön kívüli természetes és mesterséges égitestekre végzett mérések alapján vezetünk le helymeghatározó adatokat. (Velük a *Globális helymeghatározás,* majd a mesterképzésben a *Kozmikus geodézia,* a *GPS elmélete és felhasználása* és a *GNSS infrastruktúra* tantárgyban foglalkoztunk, ill. foglalkozunk részletesebben.)

A **természetes égitestekre** (általában csillagokra) végzett vízszintes és magassági szögmérés (ill. más különleges mérési módszerek) eredményei alapján kiszámíthatók az álláspont helyi függőlegesének térbeli helyzetét jellemző mennyiségek, a *Φ szintfelületi földrajzi szélesség* és a *Λ szintfelületi földrajzi hosszúság*, továbbá valamely földi irányra menő *A szintfelületi azimút.* A Φ és a Λ szögből képezhetők a helyi függőleges irányát kijelölő egységvektor iránykoszinuszai. Az ehhez szükséges méréseket és számításokat együttesen *földrajzi helymeghatározásnak* nevezzük. Pusztán a szintfelületi azimút meghatározásának különleges módszere a *stelláris háromszögelés.*

A földfelszíni P álláspontban meghatározott szintfelületi földrajzi koordinátákat a függővonal görbültségének figyelembevételével átszámítjuk a *geoidra.* Így megkapjuk az álláspont P′ *geoidi megfelelőjének* szintfelületi földrajzi koordinátáit, amelyek megadják a P′ pontban a *geoidi (felületi) normális* térbeli helyzetét a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulásának (jelenleg az ITRS) tengelyirányaihoz viszonyítva.

Geodéziai alaphálózati pontok ellipszoidi és szintfelületi koordinátáinak (az ellipszoidi és a geoidi felületi normálisainak) és egyes földi irányok kétféle azimútjának eltéréseiből (a függővonal-elhajlásokból [322.]) tudjuk a geoidhoz simuló ellipszoidnak a méretét, alakját, elhelyezését és tájékozását [323. és 42.], ill. a geoidnak az ellipszoidhoz viszonyított eltéréseit, hullámait [521.] meghatározni.

A szabatos földrajzi helymeghatározások elérhető megbízhatósága a koordinátákban mintegy ±0,1±0,3", az azimútban mintegy ±0,3÷0,5" középhibával jellemezhető.

A Föld **mesterséges holdjaira** vonatkozó mérésekkel és a rájuk támaszkodó geodéziai helymeghatározással a *szatellitageodézia* foglalkozik. Mérési módszereivel meg tudjuk határozni a földi álláspontból a mesterséges holdra mutató **s** ún. észlelési vektor irányát, nagyságát (a mesterséges hold távolságát) ill. ez utóbbinak az idő szerinti *d***s**/*dt* deriváltját (az ún. radiális sebességet). Az iránymeghatározásban elérhető középhiba mintegy ±1÷2", a távolságmérésben mintegy $\pm 1 \div 10$ cm és a radiális sebességben mintegy ±0,1 ms^{-1}.

Több ponton (közel) egyidejűen végzett mérések végeredményeként földi pontok *egymáshoz viszonyított* (relatív) helyzete (térbeli irányok és távolságok) határozhatók meg (*geometriai* szatellitageodézia). Az elérhető megbízhatóság néhány milliméter-centiméter középhibával jellemezhető.

Teljes térbeli helymeghatározáshoz az említett mérések mellett a mesterséges hold pályájának ismerete is szükséges (*dinamikai* szatellitageodézia). Ezzel végeredményként földi pontok $\mathbf{r}_P$ geocentrikus helyvektorát tudjuk meghatározni. Az elérhető megbízhatóság egyedi pontmeghatározás esetén mintegy $\pm 2 \div 5$ m középhibával, 100÷200 km-nél nem távolabbi, nagy-megbízhatóságú alappontokra támaszkodó relatív mérések esetén mintegy 1÷20 mm középhibával jellemezhető.

A mesterséges holdak geodéziai észleléséből számított helyvektorok a WGS84 rendszer koordináta irányaira és kezdőpontjára (origójára) vonatkoznak, amelyek elvileg a földi derékszögű koordináta-rendszer CIO-BIH megvalósulásával azonosak, de a meghatározás megbízhatósági szintjén gyakorlatilag ITRS koordinátáknak is tekinthetők [161.]. A teljes térbeli helymeghatározás mellett a módszer nagy előnye, hogy az összes többi geodéziai helymeghatározási módszertől független, a földfelszín bármely részén elhelyezkedő (egymástól akár több ezer kilométerre fekvő) alappontok helyzetét ugyanabban a földi térbeli koordináta-rendszerben adja meg, egymástól függetlenül. Ezek a pontok a földfelszínt beborító egységes világhálózatot alkothatnak.

*

A különböző módszerekkel végzett mérések és számítások végrehajtásának gyakorlati részleteit más tantárgyak ismertetik. A felsőgeodéziában a kapott eredmények felhasználásával foglalkozunk a Föld elméleti, illetve fizikai alakjának és nehézségi erőterének meghatározása szempontjából. Ezekre a mérési eredményekre támaszkodva kell a földalak-meghatározás feladatát megoldanunk.

Számunkra a feladat, tehát a fizikai földfelszínen kijelölt geodéziai alaphálózat pontjaiból álló poliéder sarokpontjai térbeli helyzetének meghatározása. Ebben az egyes mérési műveletek eredményei a következőkben összefoglalt szerepet játsszák.

A vízszintes szögmérések megadják a hálózat *alakját,* a távolságmérések egyes hálózati oldalak hosszát, ezzel az egész hálózat *méretét*. Az egyes pontokon meghatározott szintfelületi földrajzi koordináták megadják a hálózat *elhelyezését* és a mért szintfelületi azimútok pedig ennek *tájékozását* a földi derékszögű koordináta-rendszer alapirányaihoz viszonyítva. A koordináta-tengelyekre ellipszoidot illesztve, ezután számítani tudjuk a hálózati pontok ún. *vízszintes helyzetét* mutató ellipszoidi földrajzi koordinátákat.

A szabatos szintezések a nehézségi mérésekkel együtt a pontok *geoid (tengerszint) feletti magasságát* eredményezik.

A földrajzi helymeghatározások eredményei a már ismert ellipszoidi földrajzi koordinátákkal együttesen és/vagy a nehézségi mérések lehetővé teszik a geoid alakjának az ellipszoidhoz viszonyított meghatározását. Ezzel a tengerszint feletti magasságokat kiegészítve, kapjuk pontjaink *ellipszoid feletti magasságát*, ami a vízszintes koordinátákkal együttesen megadja a pont *teljes térbeli helyzetét* (szükség esetén a helyvektorát).

A magasságmeghatározást más úton, zenitszög mérésen alapuló trigonometriai magasságméréssel is végezhetjük.

Az eddig említett mérési műveletek és eredményeik *szükségesek és elégségesek* a Föld fizikai, ill. elméleti alakját képező ponthalmaz térbeli helyzetének (a Föld alakjának) a hagyományos geodéziai úton végzett meghatározásához.

A napjainkban egyre jobban elterjedő mesterséges holdas helymeghatározási módszerek – az *eddigiektől teljesen függetlenül* – önmagukban képesek alaphálózati pontjaink *teljes térbeli helymeghatározására* a földi térbeli derékszögű és a ráillesztett ellipszoid felületi koordináta-rendszerben. A pontjaink *tengerszint (geoid) feletti magasságának* meghatározásához azonban ez esetben is szükség van a geoid alakjának már említett módon végzendő meghatározására.

Feladat:

- Mutassuk be vázlatokon az egyes mérési műveletek során mért mennyiségek geometriai tartalmát és a meghatározott végeredményt.

4. Hét

3. GEODÉZIAI VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK MEGHATÁROZÁSA

31. A geodéziai földmodell és a geodéziai vonatkoztatási rendszer

A Föld alakjának és külső nehézségi erőterének meghatározásához a természetet megközelítő modellt, geodéziai földmodellt alkotunk. Ennek elemeit a *„normál”* jelzővel különböztetjük meg a valóságostól.

A <u>*Föld normálalakja*</u> *a Föld (matematikai alakjának, a geoidnak) méretét, alakját jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás), viszonylag egyszerű matematikai (geometriai) felület.* A gyakorlatban általában forgási ellipszoid.

A <u>*Föld normál nehézségi erőtere*</u> *a Föld valóságos nehézségi erőterét jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású, viszonylag egyszerű matematikai összefüggésekkel előállított (képzeletbeli) erőtér.*

A **geodéziai földmodell** a Föld *normálalakjának* és *normál nehézségi erőterének* (matematikailag összekapcsolt) együttese. Ilyen értelmezésben a geodéziai földmodell

- egyrészt geodéziai feladataink megoldásában a Föld geometriájának és külső nehézségi erőterének olyan *„előzetes értéke”*, melyhez a természetet (a fizikai valóságot) viszonyítjuk. Ha földmodellünket jól választjuk meg, akkor a természet és a modell eltérései kicsi értékek, amelyeket viszonylag egyszerűbb (gyakran lineáris) összefüggésekkel tudunk meghatározni.

  (A matematikai statisztika nyelvén fogalmazva, földmodellünk a Föld geometriájának (alakjának) és külső nehézségi erőterének a *„trendjét”* mutatja, és a természetnek ehhez viszonyított eltérése a mérésekkel meghatározandó *„jel”*.)

- másrészt a Föld geometriájának és külső nehézségi erőterének jó közelítője, mely alkalmas arra, hogy a geodézia mellett, a társtudományok (geofizika, csillagászat, navigáció, stb.) és a nagyközönség részére Földünket nagy vonalakban jellemezze.

Felsőgeodéziai munkákban a meghatározott földfelszíni, vagy felszínközeli (többnyire az I. rendű alaphálózati) pontok helyzetét általános használatra ellipszoidi felületi koordinátákkal [162.1.] adjuk meg. Erre a célra a Föld ellipszoidi normálalakját valamely vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszerére illesztve *vonatkoztatási (referencia) ellipszoidként* használjuk (amire a koordinátákat vonatkoztatjuk).

Mindaddig, amíg helymeghatározási feladatainkat pusztán geometriai (szög és távolság) jellegű mérési eredményekre támaszkodva oldjuk meg, ezen geometriai jellegű mérések eredményeinek feldolgozásához elegendő a vonatkoztatási ellipszoidot (a Föld normálalakját) *tisztán geometriai felületként* értelmezni (amelynek az anyaghoz semmi köze). Mérete, alakja tisztán geometriai (szög- és távolság-) mérések eredményeiből meghatározható [32.].

(Megjegyezzük, hogy a Föld ellipszoidi *normálalakja* és a XVII-XIX. században ellipszoidként értelmezett *matematikai alakja* annak idején azonos fogalom volt. A két fogalom azóta különült el egymástól, amióta Gauss felismerése alapján a Föld matematikai alakját a nehézségi erőtér *szintfelületeként* értelmezzük (*geoid*)).

A Föld geometriájának meghatározása mellet a geodézia feladata a földi nehézségi erőtér (szerkezetének, eloszlásának) meghatározása is. Továbbá, ha a földalak meghatározásába a tengereken és az egész Föld külső terében is mérhető fizikai jellegű mennyiségeket (pl. nehézségi méréseket, mesterséges hold észleléseket) is be akarunk vonni, akkor ezek eredményeinek feldolgozásához is viszonyítási alap, (az „előzetes érték" szerepét betöltő) „*vonatkoztatási erőtér*" szükséges. Erre a célra szolgál a Föld valódi nehézségi erőterét megközelítő, de viszonylag egyszerűen számítható, szabályos eloszlású (képzeletbeli) *normál nehézségi erőtér*, amelyet megfelelő matematikai eszközökkel alkotunk. Számszerű meghatározása geometriai adatok ismeretében fizikai jellegű (nehézségi) mérések eredményeiből lehetséges [34.].

A Föld geometriájának és nehézségi erőterének meghatározásakor a geometriai és a fizikai jellegű méréseink eredményeit *együttesen* akarjuk feldolgozni. Ehhez olyan *közös* viszonyítási alap kell, amelyben a Föld normálalakja és normál nehézségi erőtere (matematikailag meghatározott) *egyetlen közös* rendszernek, a *geodéziai földmodellnek* egy-egy eleme.

Ehhez úgy jutunk, hogy a Föld M tömegével megegyező tömegű (forgási és egyenlítői szimmetriás tömegeloszlású), a Föld méreteit jól megközelítő méretű testet képzelünk, amit tehetetlenségi főtengelye körül a Föld ω forgási szögsebességével megforgatunk. Ekkor a test felszínén és külső terében a Földéhez hasonló, ezt megközelítő, de forgási és egyenlítői szimmetriás eloszlású, szabályos nehézségi erőtér keletkezik. Ezt a képzeletbeli erőteret tekintjük *normál nehézségi erőtérnek.* Ennek térerőssége a γ *normál nehézségi térerősség* és potenciálja az *U normálpotenciál,* szintfelületei általában valamilyen szintszferoidok [3.3.2.]. A Föld *normálalakját* pedig a normál nehézségi erőtér egyik szintfelületeként értelmezzük. Gyakorlati okokból mindig törekszünk arra, hogy mind a normál nehézségi erőtér, mind a Föld normálalakja viszonylag egyszerű összefüggésekkel legyen matematikailag leírható. *Vonatkoztatási felületként* vagy az így, fizikailag meghatározott normálalakot, vagy a vele egyenlő tengelyhosszúságú forgási ellipszoidot használjuk (ha a kettő nem azonos). A fizikai geodéziában a vonatkoztatási felület mindig *geocentrikus* elhelyezésű.

Az így értelmezett *geodéziai földmodellt matematikailag meghatározó mennyiségek* (paraméterek) (mint, pl. a vonatkoztatási felület a mérete, f lapultsága (alakja), a Föld tömegét jellemző kM szorzat (az ún. geocentrikus gravitációs állandó), a Föld ω forgási szögsebessége, stb.) *számszerű értéksorát* **geodéziai vonatkoztatási rendszernek** (*Geodetic Reference System = GRS*) nevezzük. Meghatározása geometriai és fizikai jellegű mérési eredmények együttes feldolgozásával lehetséges [3.4.].

Felhívjuk a figyelmet, hogy a *„geodéziai vonatkoztatási rendszer"* fogalom a 161.-ben tárgyalt *„vonatkoztatási rendszer"* fogalomnak lényegesen kibővített tartalmú változata. Mint az előbbi értelmezése mutatja ez a Föld geometriája és külső nehézségi erőtere meghatározásának viszonyítási alapjaként szolgáló földmodellnek a számszerű jellemzőit tartalmazza. A földmodell pedig közvetett módon magába foglalja a *földi térbeli derékszögű koordináta-rendszert"* (valamelyik megvalósulását és ennek keretpontjait) is.

Nemzetközi munkacsoportok, vagy nagyobb geodéziai intézmények egyre több és újabb mérési eredmény feldolgozásával ezt az adatsort időnként újraszámítják. Egyes közgyűléseinek idejében legjobb értéksort a *Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió* (International Union of Geodesy and Geophysics = IUGG) a tagországai részére ajánlásba foglalja. Így használatban van pl. a *GRS67, GRS80* jelű értéksor. Ezek hosszabb időre szóló „szabvány" (standard) értékek a geodézia, geofizika, csillagászat, navigáció, stb. számára.

Az Unió ajánlásai közötti időben is folyik az értéksor időnkénti újraszámítása, és a kapott „pillanatnyi legjobb értékekről” a *Nemzetközi Geodéziai Szövetség* (International Association of Geodesy = IAG) ad tájékoztatást.

A következőkben – a fejlődés sorrendjét követve – tekintsük át először az ellipszoidméretek meghatározásának tisztán geometriai módszereit.

32. Az ellipszoid-méretek meghatározása geometriai módszerekkel

321. A fokmérés és alkalmazásának eredményei

321.1 A fokmérés elve

Ha valamely görbe felületen megmérjük a felületre merőleges sík által kimetszett rövid felületi ívdarab hosszúságát és meghatározzuk az ívdarab két végpontjához tartozó görbületi sugarak által bezárt középponti szöget, akkor ezekből az adatokból − az ív, a sugár és a középponti szög összefüggésével − kiszámítható a felületi ívdarabnak − és egyidejűleg a felületnek az ívdarab irányába eső − görbületi sugara. Ez a *fokmérés alapelve.*

A fokmérés elvét az ókorban a gömb alakúnak képzelt Föld R sugarának meghatározására használták. Ehhez elegendő volt egyetlen s ívdarab és a hozzátartozó $\Delta\varphi$ középponti szög megmérése, amiből a gömb sugarát ki tudták számítani. (A mérést – gyakorlati okból – meridiánban, vagy közvetlen közelében végezték.)

A XVII. századtól, amikor *Newton* és *Huygens* felismerései alapján a Föld (elméleti) alakját forgási ellipszoidnak tekintették [12.], a feladat a forgási ellipszoid a és b tengelyhosszának, vagy a és e^2 paraméterének meghatározása volt. Ekkor feltételezték, hogy

- a nyugalomban képzelt tengerfelszínek *ugyanazon forgási ellipszoid* egyes felületdarabjai,
- a helyi függőleges irányok *ellipszoidi felületi normálisokkal* azonosak (így a csillagészleléssel meghatározott földrajzi koordinátákat *ellipszoidi földrajzi koordinátáknak* tartották),
- a tengerszintre átszámított ívhosszak *ellipszoidi felületi ívhosszaka*t eredményeznek.

Mivel akkoriban a pólusmozgás fogalmát még nem ismerték, a XIX. század végéig az előbbiekhez hozzájárult még az a hallgatólagos feltételezés is, hogy

- a földtestnek a forgástengelyen elfoglalt helyzete az időben változatlan, és a csillagészleléssel meghatározott földrajzi szélesség értékeket a *forgástengelyre* vonatkoztatták.

A fokmérés módszere az ellipszoid méretének és alakjának meghatározására is alkalmazható, de mivel ez esetben két paramétert kell meghatározni, a fokméréshez tartozó méréseket legalább két helyen kell elvégezni. Mivel a felületi normálisok (görbületi sugarak) által bezárt középponti szöget legkönnyebben (és így legrégebb óta) az ív két végpontjának földrajzi szélesség különbségeként tudták meghatározni, ezért kezdetben csaknem kizárólag **meridián irányú fokmérést** végeztek. Különböző földrajzi szélességű helyeken (az ellipszoid méretéhez viszonyítva elemi hosszúságú) két meridián ívdarabot tűztek ki, melynek megmérték az s_{m1} és s_{m2} hosszúságát, továbbá végpontjaik φ_1 és φ_1', valamint φ_2 és φ_2' földrajzi szélességét. . Ha az ívdarabok végpontjainak $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_1'$, ill. $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_2'$ másodpercben kifejezett szélességkülönbségével elosztjuk a megfelelő s_{m1} , ill. s_{m2} ívhosszat, akkor kiszámíthatjuk az ellipszoidnak az egyes, elemi hosszúságúnak tekintett ívdarabokhoz tartozó közepes meridián irányú görbületi sugarát. Ez viszont az ellipszoid geometriájából ismert

$$M = M(a, e^2, \varphi)$$

kapcsolatban van az ellipszoid paramétereivel és a földrajzi helyzettel. Így a két ívdarabhoz az $\tilde{M}_1$ és az $\tilde{M}_2$ ismert számértékkel és az ívhosszak $\tilde{\varphi}_1$, ill. $\tilde{\varphi}_2$ ismert közepes szélességével kétismeretlenes egyenletrendszert írhatunk fel, amelyből az a és az e^2 két ismeretlen kiszámítható.

Az ívhosszaknak a meghatározására *Snellius* 1615-ben bevezette a háromszögelés módszerét, amit azóta is kiterjedten alkalmazunk a geodéziai gyakorlatban.

A földrajzi hosszúságkülönbségek mérésének fejlődésével lehetővé vált a **paralelkör irányú fokmérés** is. Ez esetben azonos paralelkörön fekvő két pont között kell megmérni az s_p (paralelkör) ívdarab hosszát, továbbá szükséges a végpontok $\Delta\lambda$ ellipszoidi földrajzi hosszúságkülönbségének és φ ellipszoidi földrajzi szélességének ismerete.

A paralelkör sugarát egyrészt a mérési eredményekből az $s_p/\Delta\lambda$ hányadosként, másrészt az ellipszoid geometriájából ismert $N\cdot\cos\varphi$ összefüggéssel fejezhetjük ki, ahol az N harántgörbületi sugár az

$$N = N(a, e^2, \varphi)$$

kapcsolatban áll az ellipszoid paramétereivel és a földrajzi helyzettel.

A gyakorlati megoldáshoz ismét két ívdarabot kell megmérni φ_1 és φ_2 különböző földrajzi szélességen. Az így felírható két egyenletből az a és e^2 két ismeretlen számítható.

Végül a fokmérés elve harmadik változatban, **általános irányú (vagy ferde ívű) fokmérésként** is hasznosítható. Ez esetben a P_1 és a P_2 tetszőleges helyzetű végpontok közötti $s_{1,2}$ ívhosszat, a végpontok φ_1 és φ_2 ellipszoidi földrajzi szélességét, $\Delta\lambda_{1,2}$ ellipszoidi földrajzi hosszúságkülönbségét, valamint az ív két végérintőjének a helyi meridián irányával bezárt $\alpha_{1,2}$ és $\alpha_{2,1}$ ellipszoidi azimútját kell meghatározni.

Ily módon ismertté válik a PP_1P_2 ellipszoidi pólusháromszögnek 6 adata. Mivel ennek geometriai meghatározásához 3 adat és az ellipszoid megadásához további 2 adat, összesen tehát 5 adat szükséges, ezért még fölös mérésünk is van. Így a mérési eredményekből megfelelő geometriai összefüggésekkel az ellipszoid keresett két meghatározó adata kiszámítható.

A gyakorlatban – az elkerülhetetlen mérési hibák hatásának csökkentése érdekében – általában a szükségesnél több mennyiség mérésével határozzuk meg a keresett ismeretleneket, ha az elérhető szélső pontosságra törekszünk. A fokmérés esetében is, a gyakorlatban lehetőleg hosszabb ívdarabokat mértek, amelyeket közbenső pontokkal több szakaszra osztottak. Így a keresett ismeretlenek meghatározása szempontjából ún. fölös méréseik is voltak. Ilyenkor az ismeretlenek legmegbízhatóbb értékét valamilyen négyzetösszeg minimumfeltétel bevezetésével a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával számították ki.

Feladat:

- Mutassuk be vázlaton a meridián, a paralelkör és az általános irányú fokmérés elvét.

321.2. Nevezetes fokmérések

A nevezetesebb *meridián-fokmérések:*

1. Az angol-francia-spanyol ív Saxavordtól (+60°50') Laghouatig (+33°48') 27°2' amplitúdóval kb. 3000 km hosszban. Ennek a fokmérésnek különös nevezetessége a Földközi-tengert Spanyolország és Észak-Afrika között áthidaló néhány háromszög, amelyben 270 ÷ 280 km hosszú oldalak fordulnak elő, s így a háromszögek szögeinek megmérése annak idején - a XIX. század utolsó évtizedeiben - rendkívüli nehézségeket okozott. Érdekességként megemlítjük, hogy ennek a meridiánívnek Dunkerque és Barcelona közötti középső szakasza azonos a méterfokmérés ívével, amelynek 1792-1808 között végrehajtott mérése alapján vezette le *Méchain* és *Dalambre* a méter hosszát.

2. A *Struve-Tanner*-féle orosz-skandináv ív a Fekete-tengertől az Északi-Jeges-tengerig (+45°20' és +70°40' között) 25°20' amplitúdóval 2800 km hosszban.

3. Az afrikai ív a 30°-os meridián mentén a Fokvárostól Kairóig 61° amplitúdóval (6750 km), amelynek középső kb. 18° hosszúságú ívét csak 1953-ban mérték meg.

4. Az indiai főív a 73°-os meridián mentén 21° amplitúdóval.

5. Az indiai 2. ív a 75°-os meridián mentén 19° amplitúdóval.

6. A 98° menti meridiánív az USA-ban, illetőleg Mexikóban, amelynek kész szakasza egy 23°-os és egy 6°-os ív.

7. A kelet-európai ív az Északi-Jeges-tengertől Kairóig, amely csatlakozik az afrikai ívhez. Nagy része, amely átszeli Norvégiát, Finnországot, Oroszországot, Ukrajnát, a második világháborúig elkészült. A Földközi-tenger áthidalását Krétán át azonban csak későbben oldották meg a SHORAN mérési technika (radar) eszközeivel.

A nevezetesebb *paralelkör menti fokmérések:*

1. A francia közép paralelív csaknem 15° amplitúdóval a 31°-os paralelkör mentén egész az Adriai-tengerig.

2. A párizsi paralelív Bresttől Münchenig.

3. Az 52°-os paralelív ~ 69° amplitúdóval, Írországtól az Urálig.

4. Az észak-afrikai ív.

5. Az indiai paralelívek a 13, 18 és 24°-os paralelkör mentén.

6. Négy amerikai paralelív (32, 39, 42, és 46° mentén) 60° amplitúdóval.

7. Az amerikai ferde ív a keleti part mentén 23,5° amplitúdóval.

321.3. A fokmérések eredményei

A nevezetesebb fokmérések eredményei közül számszerűen a már említett ún. ***méterfokmérés*** (1792-1798) ellipszoidjának jellemzőit mutatjuk be (itt és egyéb helyeken is a numerikus excentricitás helyett a szemléletesebb f geometriai lapultság értéket adjuk meg):

$$a = 6\ 375\ 738{,}7 \text{ m},$$

$$f = 1/334{,}29.$$

Ennek, és más fokméréseknek az eredményei is arra a gyakorlati tapasztalatra vezettek, hogy a kettőnél több ívdarab mérési eredményeinek együttes feldolgozásakor a maradék ellentmondások általában lényegesen nagyobbra adódtak, mint amit a mérések szórása (középhibája) alapján várni lehetett.

A későbbi időkben, amikor már több fokmérés eredményei is rendelkezésre állottak, megkísérelték ezeket együttes kiegyenlítéssel feldolgozni. Erre első példa ***Walbeck*** ellipszoidja (1819), mely 6 fokmérés együttes feIdolgozásával jött létre. Ennek jellemzői:

$$a = 6\ 376\ 896 \text{ m},$$

$$f = 1/302{,}78.$$

Bessel, korának legjobb 10 fokméréséből vezette le ellipszoidjának jellemzőit (1837-41):

$$a = 6\ 377\ 397{,}15 \text{ m},$$

$$f = 1/299{,}1528.$$

(Ez volt hosszú ideig a magyarországi felmérések vonatkoztatási ellipszoidja [44.].)

A több fokmérés eredményének együttes feldolgozása arra a sajátos tapasztalatra vezetett, hogy a maradék ellentmondások ahelyett, hogy a mérési eredmények számának növelésével csökkentek volna, még inkább növekedtek, és nem véletlen eloszlást mutattak. Ez a tapasztalat arra a felismerésre vezetett, hogy a helyi függőlegesek nem ellipszoidi normális irányok. Akkor pedig a helyi függőleges irányokra merőleges felület nem ellipszoid, hanem valamilyen más felület. Így jutott el *Gauss* a szintfelületek és a Föld elméleti alakja új fogalmához, amit később *geoidnak* neveztek el (*Listing* 1878).

Földrajzi szélesség meghatározásaink közvetlen mérési eredményei az álláspont helyi függőlegesének, tehát szintfelületi normálisának irányát határozzák meg a térben. Így a maradék ellentmondások, a mérési hibák mellett, a helyi függőleges irányok és az ellipszoidi normálisok iránykülönbségét, vagyis a szintfelületek, (a geoid) és az ellipszoid egymástól eltérő görbületi viszonyait tükrözik.

Így mai ismereteink szerint a *fokmérések eredményeként* egyes (meridián, paralelkör, vagy általános irányú) ívek mentén a szintfelületek (a geoid) alakjához simuló ellipszoid méretét és alakját, azaz *helyi simuló ellipszoidokat* kapunk.

Mivel a geoid görbületi viszonyai meglehetősen változatosak, ezért a simuló ellipszoidok is különböző méretűek és alakúak, attól függően, hogy hol végezték a méréseket. A különböző helyeken simuló ellipszoidok geometriai középpontja sem esett egybe, sem egymással, sem a Föld tömegközéppontjával. Ily módon *fokméréssel gyakorlatilag nem lehet ún. földi (geocentrikus) elhelyezésű ellipszoidot meghatározni.*

A geoid fogalmának bevezetésével az ellipszoid meg is szűnt mint „a Föld elméleti alakja”, de megmaradt egyrészt a geodéziai helymeghatá*rozás vonatkoztatási felületeként,* másrészt a földalak egyik *szabályos megközelítőjeként*. Átvitt értelemben ezért ma is használjuk pl. a „FöId egyenlítői tengelyhossza” és a „Föld lapultsága” fogalmakat, amelyeken a Földet (a geoidot) helyettesítő (közelítő) valamelyik ellipszoid, szabatos értelemben az ún. *közepes földi ellipszoid* [343.3] megfelelő jellemzőjét értjük. (Ennek meghatározása azonban csak fizikai módszerek bevonásával lehetséges, amivel későbben fogunk foglalkozni [34.]) .

Feladatok:

- Hogyan határozzák meg a földrajzi koordináták a helyi függőleges, illetve az ellipszoidi normális térbeli helyzetét?
- Mely esetben kapnánk nulla maradék ellentmondás rendszert?

5. Hét

322. A függővonal-elhajlás fogalma és alapösszefüggései

A helyesen felállított teodolit állótengelye a helyi függőleges (a helyi szintfelületi normális) irányába mutat. Mint a fokmérések tapasztalatai alapján bebizonyosodott, a helyi függőleges irányok, amelyeknek térbeli helyzetét a földrajzi helymeghatározás méréseink eredményei mutatják, az álásponton átmenő ellipszoidi normális iránnyal néhány (esetleg néhányszor 10) másodpercnyi szöget zárnak be. Ennek a szögnek ξ meridián irányú vetülete a fokmérésekkel kapcsolatban már említett maradék ellentmondás [321.]. Hasonló maradék ellentmondásokra jutunk a paralelkör irányú fokmérés számítása során is (ha fölös számú méréseink vannak). Ezek pedig a helyi függőleges irány és az ellipszoidi normális közötti szög meridiánra merőleges vetületét adják, amit η-val jelölünk.

A két összetevőből előállítható

$$\Theta = (\xi^2 + \eta^2)^{½} \tag{322.1}$$

szög tehát a *helyi függőleges és az álásponton átmenő ellipszoidi normális iránykülönbsége*, amit <u>függővonal-elhajlásnak</u> nevezünk. (A függővonal-elhajlásnak ettől kissé eltérő, más értelmezésével is fogunk még találkozni [533.3.].)

Attól függően, hogy a függővonal-elhajlást valamely P földfelszíni pontban, vagy ennek P' geoidi megfelelőjében értelmezzük, megkülönböztetünk *földfelszíni* (*Helmert*-féle), illetve *geoidi* (*Pizetti*-féle) függővonal-elhajlásokat.

Másik megkülönböztetés szerint *relatív* függővonal-elhajlásról beszélünk, ha a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontja általános helyzetű és *abszolút (geocentrikus)* függővonal-elhajlást mondunk, ha az ellipszoid középpontja a Föld tömegközéppontjával azonos. (Ezt a helyzetet csak fizikai módszerek alkalmazásával lehet elérni.)

A függővonal-elhajlás szögét, pontosabban ennek összetevőit a helyi függőleges, illetve az ellipszoidi normális térbeli helyzetét meghatározó földrajzi koordinátákból és/vagy a szintfelületi és ellipszoidi azimút értékekből számíthatjuk. (Emlékeztetünk arra, hogy mind a szintfelületi, mind az ellipszoidi földrajzi koordinátákat a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása, CIO-BIH, vagy ITRS) *Z* tengelyére, és *XZ* síkjára vonatkoztatjuk [16.].) Ezekből

$$\xi = \Phi - \varphi, \tag{322.2}$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos\varphi, \tag{322.3}$$

$$\eta = (A - \alpha) \operatorname{ctg}\varphi. \tag{322.4}$$

A (322.3) és (322.4) egybevetéséből rendezés után az azimútokra vonatkozó <u>Laplace-egyenletre</u> jutunk

$$A - \alpha = (\Lambda - \lambda) \sin\varphi, \tag{322. 5}$$

amely valamely irány szintfelületi és ellipszoidi azimútja közötti különbséget mutatja. Ennek fontos szerepe van a geodéziai alaphálózatok számításakor.

A függővonal-elhajlások alapvetően abból származnak, hogy a Föld tömegeloszlásának szabálytalanságai miatt a szintfelületek változatosabb alakú felületek, mint a szabályos forgási ellipszoid alak.

Feladatok:

- Szerkesszünk vázlatot a függővonal-elhajlás földfelszíni és geoidi értelmezésének bemutatására!
- Bizonyítsuk a függővonal-elhajlás összetevőkre felírt (322.2) és (322.3) összefüggés helyességét egységsugarú gömb segítségével.
- Állapítsuk meg, hogy mely esetben lesz valamely irány szintfelületi és ellipszoidi azimútja azonos nagyságú.
- Mi a geometriai értelme a ($\xi = 0$, $\eta \neq 0$); a ($\xi \neq 0$, $\eta = 0$) és a ($\xi = 0$, $\eta = 0$) értékpároknak?
- Mi a geometriai tartalma a nullaértékű függővonal-elhajlásnak?

323. A felületek módszere és alkalmazásának eredményei

Az emberi társadalom fejlődése során a XVIII.-XIX. században a gazdaságilag gyorsabban fejlődő földrészeken megkezdődött az országok területét beborító (nemzeti) geodéziai alaphálózatok kialakítása. Ezeken belül néhányszor 10 km-es átlagos távolságokra alappontokat létesítenek, és megmérik a szomszédos pontok közötti $s_{i,k}$ távolságokat valamint a pontokból kialakított geometriai alakzatok (általában háromszögek) $\beta_{h,i,k}$ belső szögeit. A mérési eredményeket a tengerszint magasságába számítják át, és a hálózatban felírható geometriai feltételek figyelembevételével kiegyenlítik.

A hálózat belső szögeinek és oldalhosszainak mérésén kívül, több (lehetőleg egyenletes területi elosztásban) kijelölt P_i (i = 1, 2,... n) ponton (a csillagászati-geodéziai pontokban) megmérik a Φ_i és Λ_i szintfelületi földrajzi koordinátákat és a pontból kiinduló valamelyik oldal $A_{i,k}$ szintfelületi azimútját. Ezeket a mérési eredményeket − a szintfelületek között vetítővonalként a függővonalat használva − a földfelszíni pontok *geoidi megfelelőjébe* számítják át.

A felsorolt mérési eredmények szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy belőlük a szóban lévő hálózat területén a *geoid ezen felületdarabjához simuló $E(a, e^2)$ forgási ellipszoidnak* a jellemzőit számszerűen meghatározzuk. Az erre a célra szolgáló számítási eljárás a *felületek módszere*, vagy más néven a *csillagászati-geodéziai függővonal-elhajlás kiegyenlítés*. Ennek a fejlődés különböző fokát képviselő két változatát különböztetjük meg.

323.1. A *Helmert* (*Hayford*)-féle (transzlatív) függővonal-elhajlás kiegyenlítés

Ez az eljárás lényegében a fokmérés továbbfejlesztése (általánosítása) úgy, hogy nem csupán egyes meridián, ill. paralelkör *ívdarabokhoz*, hanem a geoid egyes *felületdarabjaihoz* számítunk simuló ellipszoidot.

A két felület simulásának geometriai feltételeként a két felület normálisai által bezárt szögek (azaz *a függővonal-elhajlások*) *négyzetösszegének minimumát* választjuk. (Ez vezet ugyanis a legegyszerűbb matematikai összefüggésekre a mérési eredményekkel kapcsolatban, és ugyanakkor geometriai tartalmában megegyezik azzal a feltétellel, mintha a két felület merőleges távolságainak nulla összegét, vagy négyzetösszegének minimumát írnánk elő.)

A *geoidi normálisok* térbeli helyzetét egyes hálózati pontokban a földfelszínen mért és a geoidra átszámított Φ_i és Λ_i szintfelületi földrajzi koordináták segítségével adjuk meg.

Az *ellipszoidi felületi normálisok* helyzetét ugyanezen pontok ellipszoidi földrajzi koordinátái mutatják. Ez utóbbiak kiszámításához fel kell venni az (a) és (e^2) előzetes értékekkel jellemzett ellipszoidot *előzetes vonatkoztatási felület* céljára. Fel kell venni továbbá a hálózat egyik csillagászati-geodéziai pontjának (φ_I), (λ_I) *előzetes ellipszoidi koordinátáit* és végül az ebből kiinduló egyik oldal (amelyre szintfelületi azimútot mértek) (α_I) *előzetes ellipszoidi azimútját*. Ezen felvett 5 kiinduló adat és a hálózatban végzett szög- és távolságmérések kiegyenlített eredményeinek függvényében számíthatók a hálózat valamennyi csillagászati geodéziai pontjának (φ_i) és (λ_i) *előzetes ellipszoidi koordinátái*. Ezek adják meg az előzetesen felvett ellipszoidnak a hálózati pontokon átmenő felületi normálisai térbeli helyzetét. E mellett a hálózati pontok előzetes ellipszoidi koordinátáiból számítható az egyes hálózati oldalak ($\alpha_{i,k}$) előzetes ellipszoidi azimútja is, amely szintén a felületi normálishoz kapcsolódó geometriai mennyiség.

Az egymáshoz illesztendő két felület, a geoid és az ellipszoid felületi normálisai által bezárt szögeket, a (geoidi) függővonal-elhajlásokat a geoidi pontok szintfelületi és ellipszoidi földrajzi koordinátáinak összevetéséből (illetve az η összetevőt még az azimútok alapján is) lehet számítani a (322.2), (322.3) és (322.4) összefüggéssel.

Nyilvánvaló, hogy a függővonal-elhajlások (a felületi normálisok által bezárt szögek) ily módon kiszámított értéksorozata még nem fogja a simulás feltételeként választott négyzetösszeg-minimum feltételt kielégíteni. Ahhoz, hogy ezt elérhessük, a felvett 5 kiinduló mennyiségnek $d\varphi_I$, $d\lambda_I$, $d\alpha_I$, da és de^2 *kis változásait* kell megengednünk, és keressük ezen kis változásoknak (közöttük az ellipszoidi jellemzők változásának) azt az értéksorát, amellyel az előzetes értékrendszert megváltoztatva a nyert ellipszoidi koordinátákkal számított függővonal-elhajlások négyzetösszege már a legkisebb.

Mivel a feladat megoldását négyzetösszeg-minimum kereséshez kötöttük, előnyösen alkalmazható itt is a legkisebb négyzetek módszerének a kiegyenlítő számításokból megismert formanyelve. (Jóllehet, itt tudjuk, hogy a függővonal-elhajlások nem tekinthetők valószínűségi változónak, mert nagyon is szabályos területi eloszlást mutatnak. Így tulajdonképpen nem helyes kiegyenlítésről beszélni, de a gyakorlatban ez a számítási eljárás mégis függővonal-elhajlás kiegyenlítés néven vált ismertté.)

A közvetítő egyenleteket a függővonal-elhajlás már említett (322.2), (322.3) és (322.4) összefüggései szolgáltatják, azzal a különbséggel, hogy a φ_i, λ_i és $\alpha_{i,k}$ *végleges ellipszoidi földrajzi koordinátákat és ellipszoidi azimútokat* a (φ_i), (λ_i), ($\alpha_{i,k}$) *előzetes* ellipszoidi koordináták és azimútok és ezek egyelőre ismeretlen $d\varphi_i$, $d\lambda_i$, $d\alpha_{i,k}$ változásainak összegeként írjuk be.

Kis átalakítással és a $d\varphi_i$, $d\lambda_i$, $d\alpha_{i,k}$ változásokat az 5 kiinduló mennyiség szerinti parciális differenciálok összegéből alkotott teljes differenciállal helyettesítve, kapjuk a javítási egyenleteket a

$$\underset{(\max 3n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(\max 3n,5)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(5,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(\max.\ 3n,1)}{\mathbf{l}} \qquad (323.1)$$

alakban. Ebben

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \dfrac{\eta_i}{\cos\varphi_i} \\ \dfrac{\eta_i}{\operatorname{ctg}\varphi_i} \end{bmatrix} \qquad (323.2)$$

a kiegyenlítő számítás formanyelvén a *javítások vektora*, ahol az $\eta_i\ /\cos\varphi_i$ -ket a földrajzi hosszúságból és az $\eta_i\ /\operatorname{ctg}\varphi_i$ -ket az azimútokból számítjuk. A javítási egyenletek száma legfeljebb $3n$, ahol n a hálózatban mért csillagászati-geodéziai pontok száma (és mindegyikük *Laplace*-pont, azaz mindegyikükön mértek szintfelületi szélességet, hosszúságot és azimútot is).

A *tisztatagok* **l** vektorának elemeit a mért szintfelületi és a számított előzetes ellipszoidi földrajzi koordináták, valamint azimútok különbsége adja.

Az **A** *együtthatómátrix* elemeit a φ, λ ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság, valamint az α ellipszoidi azimút kiszámítására szolgáló függvényeknek az 5 kiinduló mennyiség szerinti parciális első differenciálhányadosai adják az *i*.-ik mérési eredmény helyén, negatív előjellel. (Itt jegyezzük meg, hogy ebben a számítási eljárásban sem a szintfelületi földrajzi koordinátákhoz és azimútokhoz, sem pedig a hálózati szög- és távolságmérésekhez nem rendelünk változást, azaz ezeket gyakorlatilag hibátlannak tekintjük.)

Az ismeretlenek

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ d\lambda_1 \\ d\alpha_1 \\ da \\ de^2 \end{bmatrix} \qquad (323.3)$$

vektora az 5 kiinduló adat kis változásait tartalmazza, melyekkel a kiinduló adatok előzetesen felvett értékét meg kell változtatni ahhoz, hogy az ellipszoid a mérési helyeken a geoidhoz a legjobban simuljon.

Az ismeretlen vektor elemeit a (323.1) szerinti, legfeljebb $3n$ számú javítási egyenletből a

$$\sum\left(\xi^2+\eta^2\right)=\text{min.} \qquad (331.4)$$

feltétel mellett az

$$\mathbf{x} = -\,(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^*\mathbf{l} \qquad (331.5)$$

alakból számíthatjuk, ha a javítási egyenletek száma nagyobb 5-nél.

Az ismeretlen vektor elemeinek kiszámítása után végeredményként kapjuk egyrészt annak az ellipszoidnak az

$$a = (a) + da \quad \text{és} \quad e^2 = (e^2)+de^2 \qquad (323.6)$$

jellemzőit, amelynek a felületi normálisai úgy illeszkednek a mérési helyeken a geoidi normálisok közé, hogy az általuk bezárt maradék szögek (a függővonal-elhajlások) négyzetösszege minimumot adjon, azaz a két felület egymáshoz legjobban simuljon.

A végeredmények másik csoportja a hálózat P_1 kiválasztott pontjának a (323.6) adatokkal jellemzett simuló méretű és alakú ellipszoidra vonatkozó

$$\varphi_1 = (\varphi_1) + d\varphi_1 \quad \text{és} \quad \lambda_1 = (\lambda_1) + d\lambda_1 \qquad (323.7)$$

végleges ellipszoidi koordinátáit, valamint az ebből a pontból kiinduló kiválasztott hálózati oldal

$$\alpha_1 = (\alpha_1) + d\alpha_1 \qquad (323.8)$$

végleges ellipszoidi azimútját adja.

Ez utóbbi eredmények a kapott (323.6) méretű és alakú ellipszoidnak a geoidhoz viszonyított simuló *elhelyezését és tájékozását* [42.] adják meg.

Ez a számítási eljárás hallgatólagosan feltételezi azt, hogy a hálózat kiválasztott P_1 pontjában a geoid és az ellipszoid egymáshoz viszonyított merőleges távolsága $N_1 \equiv 0$, és mivel ehhez változást sem rendel ($dN_1 \equiv 0$), a simuló elhelyezés után is az marad. Geometriailag ez azt a kötöttséget jelenti, hogy a (323.6) méretű és alakú ellipszoidot a simuló helyzet elérése érdekében *csak a felület irányában* (két dimenzióban) mozgathatjuk (tolhatjuk el) úgy, hogy *minden helyzetében a P_1 pont geoidi megfelelőjén átmenjen.* Ezért ezt a megoldást két dimenziós függővonal-elhajlás kiegyenlítésnek is nevezik. Erre utal a címben szereplő „transzlatív” jelző is (transzláció = eltolás).

323.2. A Vening Meinesz-féle (projektív) függővonal-elhajlás kiegyenlítés

Az előbbi megoldásnál tökéletesebb simuló helyzetet érhetünk el, ha eggyel több szabadságfokot megengedve, az ellipszoidnak a geoidhoz viszonyított három dimenziós mozgatását tesszük lehetővé. A harmadik irány ez esetben az ellipszoid felületére merőleges. Ilyen irányú mozgatás azzal érhető el matematikailag, hogy a kezdetben felvett előzetes (N_1) geoid-ellipszoid távolságnak (ami nulla is lehet) simuló helyzet elérése érdekében dN_1 változását engedjük meg, és ezt is felvesszük a kiszámítandó ismeretlenek közé. Ily módon az ismeretlenek **x** vektora a (323.3)-hoz viszonyítva, bővül a dN_1 hatodik sorral.

Mivel a geoid-ellipszoid távolságok változása az ellipszoidi földrajzi koordináták és az azimút értékét (és velük együtt a függővonal-elhajlás összetevőket) is befolyásolja, ezért az **A** együttható mátrix is bővül az ellipszoidi szélesség, hosszúság és azimút függvénynek N szerinti parciális differenciálhányadosaiból álló hatodik oszloppal.

Végeredményként itt is megkapjuk a simuló ellipszoid méretét és alakját, továbbá a simuló helyzetben az ellipszoidnak és a geoidnak egymáshoz viszonyított elhelyezését megadó φ_1, λ_1 és $N_1 = (N_1) + dN_1$ értékhármast, valamint az ellipszoid tájékozását jellemző kiinduló azimútot.

323.3. A felületek módszerének eredményei

A felületek módszerét eredményesen alkalmazta ***Hayford*** (1909-1912) az Észak-Amerikai Egyesült Államok területén létesített csillagászati-geodéziai hálózat eredményeinek alapján simuló ellipszoid meghatározására.

Szándéka az volt, hogy ellipszoidja az egész Föld alakját jól képviselje. Így, ennek érdekében a mérés útján levezetett függővonal-elhajlásokat *izosztatikus* javítással látta el. (Az izosztázia elvével a Geofizika tantárgyban ismerkedtek meg.) Ez azt jelenti, hogy a mérési pontokra kiszámította a látható és az izosztázia modellje alapján őket kiegyenlítő tömegek által okozott függővonal-elhajlás értékeket, és ez utóbbiakat a mért értékekből levonta.

Feltételezése szerint az így megmaradó (izosztatikusan javított) függővonal-elhajlások már mentesek a helyi hatásoktól, és az egész Föld tömegeloszlását tükrözik. Így, az ezekkel számított simuló ellipszoid általánosan jól használható lesz.

Eredményként

$$a = 6\,378\,388 \text{ m},$$

$$f = 1/297$$

fél nagytengely hosszúságot és lapultságot kapott, A velük jellemzett ellipszoidot a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) 1924-ben *„Nemzetközi ellipszoid"* néven elfogadta, és a tagországoknak használatra ajánlotta. Számos ország még ma is vonatkoztatási ellipszoidként használja.

Mai ismereteink szerint azonban *Hayford* feltételezése az izosztatikus javítás hatását illetően nem váltotta be a hozzá fűzött reményt, mert mind a méret, mind a lapultság kissé nagynak sikerült.

Ugyancsak a felületek módszerének alkalmazásával vezette le ***Kraszovszkij*** (1942) ellipszoidjának jellemzőit az akkori Szovjetunió, Európa és az Észak-Amerikai Egyesült Államok csillagászati-geodéziai hálózatára támaszkodva. Eredményként

$$a = 6\,378\,245 \text{ m},$$

$$f = 1/298{,}3$$

ellipszoidi jellemzőket kapott. Ezt az ellipszoidot vezették be a Szovjetunió és a 2. világháború utáni ún. európai szocialista országok (közöttük Magyarország) közös nemzetközi vonatkoztatási felületként. Mai ismereteink szerint ennek fél nagytengelye még mindig mintegy 100 m-rel hosszabb lett, míg a lapultsága már gyakorlatilag megegyezik a más módszerekkel meghatározott későbbi lapultság értékekkel.

Végeredményben a felületek módszere is *helyi simuló ellipszoidokat* szolgáltat, amelyek a simulás feltételét a meghatározásukhoz használt csillagászati-geodéziai *hálózat területén* elégítik ki. A fokméréshez viszonyítva mégis fejlettebb módszer, mert az ellipszoid simítását a geoidhoz nem csak ívdarabok, hanem *felületdarabok* mentén végezzük el. (Különleges esetként azonban magába foglalja a fokmérést is, amikor a felületdarab vonaldarabbá szűkül össze.) Az egész Föld geoidjához simuló ellipszoid méretét és alakját azonban így sem lehet meghatározni, hiszen a földfelszínnek csak alig több mint ¼ része szárazföld, ahol a szükséges méréseket elvileg el tudjuk végezni. (Amint a tapasztalat mutatja, ezen még a függővonal-elhajlások izosztatikus javítása sem segít kellő mértékben.)

Az *egész geoidhoz simuló* ellipszoid jellemzőit tehát az eddig megismert *geometriai módszerek egyikével sem lehet meghatározni.* Mivel a gyakorlat számára erre mégis szükség van, kifejlődtek a *fizikai geodézia* módszerei is, amelyek segítségével ez a feladat is megoldhatóvá vált. A tisztán geometriai és a fizikai módszerek között átmenetet képez az a megoldás, amely mesterséges holdak észleléseit felhasználva, *geometriai úton* határozza meg az egész geoidhoz simuló ellipszoid méretét és alakját.

Feladatok:

- Hasonlítsuk össze a fokmérésnek és a felületek módszerének eljárását. Miben hasonlóak, és miben különböznek egymástól?
- Írjuk fel a felületek módszerének számításában szereplő **A** együttható mátrix elemeit mindkét féle megoldás esetére.

- Miért nem lehet az egész Földhöz egyetlen simuló ellipszoidot számítani a felületek módszerével?

324. Az ellipszoid-méretek meghatározása a szatellitageodézia geometriai módszerével

A mesterséges holdak geodéziai észlelésével az utóbbi évtizedekben valamennyi földrészre kiterjedő, összefüggő *világhálózatok* létesültek. Ezek lehetőséget adnak a geoidhoz egész földi viszonylatban jól simuló, a geoidot jól megközelítő ellipszoid a, e^2 jellemzőinek geometriai meghatározására.

Ismert a világhálózat pontjainak szatellitageodéziai módszerrel meghatározott **r** helyvektora, amiből valamilyen (tetszőleges) előzetes E[(a), (e^2)] ellipszoid felvételével számíthatók a pont (φ), (λ), (h) *előzetes ellipszoidi koordinátái.* Ha a szatellitageodéziai világhálózat n számú pontjának szintezéssel meghatározzuk a *geoid (tengerszint) feletti H_i magasságát is* (i = 1, 2,…n), akkor a kétféle magassági mérőszám különbségeként számíthatjuk az egyes pontokban a geoid és a felvett ellipszoid (N_i) függőleges távolságát. Ebben a különbségben H_i a természetben mért, valóságos méret, míg (h_i) a választott ellipszoid paramétereitől függő (képzeletbeli) érték.

Keressük az ellipszoidi jellemzőknek azt a da, de^2 megváltozását, amelyet a felvett (a), és (e^2) előzetes értékhez hozzáadva, olyan E[(a) + (da), (e^2) + de^2] méretű és alakú ellipszoidot kapunk, amely a $\sum N_i = 0$, vagy a $\sum N_i^2$ = minimum feltétellel a legjobban simul a geoidhoz. Bizonyítható, hogy mindkét feltétel ugyanarra az eredményre vezet, de válasszuk az utóbbit, mert akkor a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazhatjuk.

A szintezéssel is meghatározott magasságú szatellitageodéziai világhálózati pontok mindegyikére felírható az

$$N_i = (h_i) - H_i + \left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)_i da + \left(\frac{\partial h}{\partial e^2}\right)_i de^2 \qquad (324.1)$$

alakú „javítási egyenlet”. Az n számú egyenletből álló egyenletrendszert a választott minimum-feltétellel megoldva, kapjuk az ismeretlenek **x** vektorának da, de^2 elemeit.

Végeredményként a szintezett világhálózati pontokban a *geoidhoz simuló ellipszoid* jellemzői

$$a = (a) + da \quad \text{és} \quad e^2 = (e^2) + de^2.$$

*

Mivel a geoid a földi nehézségi erőtér potenciáljának szintfelülete, a geoidhoz simuló ellipszoid jellemzőinek meghatározására további olyan módszereink is vannak, amelyek a feladat megoldásakor a nehézségi erőtérrel kapcsolatos *fizikai mennyiségek* mért értékeire is támaszkodnak. A felsőgeodéziának a fizikai mennyiségek mérési eredményeinek feldolgozásával (hasznosításával) foglalkozó részét *fizikai geodéziának* nevezzük.

6. Hét

33. A fizikai geodézia matematikai és fizikai alapjai

A történelmi fejlődés során – mint láttuk – korábban a geodéziának a geometriai (szög és távolság) jellegű eredményeket szolgáltató mérési műveletei alakultak ki. Ezek azonban a vonatkoztatási ellipszoid meghatározásában csak korlátozott lehetőségeket tudnak biztosítani. Segítségükkel csak helyi simuló ellipszoidok határozhatók meg a geoidhoz. Az egész Föld elméleti alakját közelítő, geocentrikus elhelyezésű vonatkoztatási felület alakjának és méretének meghatározásához a nehézségi erőtérre vonatkozó fizikai jellegű mérések eredményei segítenek hozzá. Az alkalmazható módszerek tárgyalása előtt célszerű feleleveníteni, kiegészíteni és összefoglalni az ehhez szükséges matematikai és fizikai alapokat.

Mivel a fizikai geodézia módszerei a nehézségi erőtér mérésén és matematikai leírásán alapulnak, első sorban az ehhez szükséges különleges matematikai ismereteket foglaljuk össze a gyakorlati geodéziai hasznosításhoz szükséges mélységig. (További részleteket a mesterképzés *Potenciálelmélet geodéziai alkalmazása* tantárgya ismertet.)

331. A gömbfüggvények geodéziai alkalmazása

A földi nehézségi erőtér $W = W(\mathbf{r}) = W(x,y,z)$ potenciálfüggvényét a (141.5) alakban állítottuk elő. Ebben a forgási centrifugális erőtér V_F potenciálját kifejező tag kiszámítása a hely és a forgási szögsebesség ismeretében nem okoz nehézséget. Ha azonban a V vonzási potenciált kifejező tagot számszerűen is meg akarjuk határozni, akkor a benne előirt integrálás végrehajtása áthidalhatatlan nehézségekbe ütközik (nem ismerjük sem a Föld belső tömegeloszlását, sem a Föld fizikai alakját, ami egyébként sem matematikai felület). Ezért a V tömegvonzási potenciál leírására alkalmasabb függvényalakot keresünk, amelyből ez ténylegesen kiszámítható lesz.

Vizsgálatunkat korlátozzuk a vonzó *földtömegen kívüli térre*.

A V potenciálfüggvényről tudjuk, hogy gradiens vektora (definíció szerint) éppen a vonzó erőhatást adja. A tömegvonzási erőtérről pedig tudjuk, hogy a forrásmentes külső térben divergenciája nulla értékű. Ezzel a megfontolással jutottunk a

$$\operatorname{div}\,\mathbf{grad}\,V = \mathit{\Delta} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (331.1)$$

Laplace-egyenletre, ahol

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (331.2)$$

a *Laplace*-féle differenciáloperátor [131.].

Ha a V vonzási potenciálfüggvény alakját ismeretlennek tekintjük, akkor a (331.1) *Laplace*-egyenlet a másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú elliptikus differenciálegyenletek osztályába tartozó meghatározó egyenlet *V*-re, melynek megoldásaként számíthatjuk ki a *V* potenciálfüggvényt.

Ehhez a számításhoz célszerűségi okokból az r, ϑ, λ térbeli poláris, azaz más szóval *gömbi koordinátákra* térünk át, és a potenciálfüggvényt is a gömbi koordináták $V = V(\mathbf{r}) = V(r, \vartheta, \lambda)$ függvényeként, azaz *gömbfüggvény alakban* keressük.

331.1. A felületi és a térbeli gömbfüggvények

A célszerűségi okokból bevezetett r, ϑ, λ gömbi (térbeli poláris) koordinátákba átírva a (331.1) *Laplace-egyenlet*et, a

$$\Delta V = \quad r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + ctg\,\vartheta\, \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0 \qquad (3311.1)$$

alakú parciális másodrendű differenciálegyenletre jutunk. Ennek megoldásaként keressük tehát a $V = V(\mathbf{r}) = V(r, \vartheta, \lambda,)$ potenciálfüggvényt.

A változók szétválasztásának módszere szerint írjuk fel a keresett *V* függvényt a

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r) \cdot Y(\vartheta, \lambda) \qquad (3311.2)$$

alakban és helyettesítsük ezt a (3311.1)-be. Ezzel a (3311.1) parciális differenciálegyenlet megoldását közönséges differenciálegyenletek megoldására vezetjük vissza. Így $f(r)$-re *Euler* típusú differenciálegyenletet kapunk, amelynek egymástól lineárisan független két megoldása

$$f_1(r) = r^n \quad \text{és} \quad f_2(r) = r^{-(n+l)} . \qquad (3311.3)$$

Ezekkel pedig a keresett potenciálfüggvény a

$$V_1(r, \vartheta, \lambda) = r^n\, Y_n(\vartheta, \lambda)$$

és (3311.4)

$$V_2(r, \vartheta, \lambda) = \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

alakba írható, ahol $n = 0, 1, 2...$ nem negatív egész számok.

A ϑ, λ gömbi koordináták egyelőre ismeretlen alakú *Y* függvényét *felületi gömbfüggvénynek* (vagy *gömbfelületi függvénynek*) nevezik, míg a *V* függvény (3311.4) alakjának jobb oldalán álló függvényalakokat *térbeli gömbfüggvénynek* mondják.

Mivel lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak összege is megoldás, írhatjuk általánosságban, hogy

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad \text{és} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \qquad (3311.5)$$

A (3311.1) *Laplace-egyenlet* megoldása tehát első alakban a (3311.5) szerinti két *térbeli gömbfüggvény sor*. Közülük a külső térre a jobboldali alak vonatkozik, így a továbbiakban csak ezt fogjuk használni.

Keressük a továbbiakban az *Y* felületi gömbfüggvények alakját.

A (3311.1) *Laplace*-egyenletnek, mint másodrendű differenciálegyenletnek a további megoldása során az

$$Y(\vartheta,\lambda) = g\,(\vartheta)\cdot h(\lambda) \tag{3311.6}$$

újabb helyettesítéssel és a változók szétválasztásával további két közönséges differenciálegyenletre jutunk.

Ezek egyikének megoldásait

$$h_1(\lambda) = \cos m\lambda \quad \text{és} \quad h_2(\lambda) = \sin m\lambda \tag{3311.7}$$

alakban kapjuk.

A másik közönséges differenciálegyenlet *Legendre* típusú egyenlet, amelynek megoldásai a

$$g(\vartheta) = P_{n,m}(\cos\vartheta) = P_{n,m}(t) \tag{3311.8}$$

n-ed fokú, m-ed rendű *Legendre-függvények*, amelyeket általában a

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,(1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^{\,n+m}}{dt^{\,n+m}}(t^2-1)^n, \tag{3311.9}$$

ahol

$$n = 0,1,2,...; \quad m = 0,1,2,...n$$

képletből számíthatjuk. Itt a rövidség kedvéért alkalmaztuk a $\cos\vartheta = t$ jelölést. (Emlékeztetünk arra, hogy 0! = 1.)

A (3311.7) és a (3311.8) megoldást a (3311.6)-ba helyettesítve az *n-ed fokú felületi gömbfüggvényekre* az

$$Y_n(\vartheta,\lambda) = P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\lambda$$

és (3311.10)

$$Y_n(\vartheta,\lambda = P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\lambda$$

alakokat kapjuk.

Általános megoldásként ezek összes lineáris kombinációjának összege

$$Y(\vartheta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n}\,[c_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\lambda + s_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\lambda], \tag{3311.11}$$

ahol $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ tetszőleges állandók.

Behelyettesítve az n-ed fokú felületi gömbfüggvények (3311.11) általános alakját a (3311.5)-be, kapjuk a V potenciálfüggvényt *térbeli gömbfüggvénysor* alakban a (3311.1) *Laplace*-egyenlet általános megoldásaként a külső térre:

$$V(r,\vartheta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\,[c_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos m\lambda + s_{n,m}\,P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin m\lambda]. \tag{3311.12}$$

Tetszőleges testnek, így a Föld tömegének is a vonzási potenciálfüggvénye felírható a (3311.12) térbeli gömbfüggvénysor (térbeli *Fourier-*, vagy *Laplace-Fourier*-sor) alakjában a $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ együtthatók megfelelő megválasztásával.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, röviden összefoglaljuk még az ebben szereplő **felületi gömbfüggvények fontosabb tulajdonságait.**

A (3311.10) szerint értelmezett felületi gömbfüggvényekben szereplő n-ed fokú és m-ed rendű *Legendre* függvényeket a (3311.9) képletből számíthatjuk. Két csoportjukat különböztetjük meg.

A *Legendre-polinomok,* az m = 0 rendű *Legendre*-függvények, amelyek (ismét a rövidség kedvéért a $\cos\vartheta = t$ jelöléssel) a

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\,(t^2-1)^n \qquad (3311.13)$$

Rodrigues-képlettel állíthatók elő.

A szemléletesség kedvéért helyettesítsük a ϑ gömbi pólustávolságot a geodéziában használatosabb $\psi = 90°-\vartheta$ *gömbi szélességgel;* ekkor $\cos\vartheta$ helyett $\sin\psi$-t kell írnunk, és a továbbiakban ennek a $P_n(\sin\psi)$ *Legendre*-polinomjainak a tulajdonságait foglaljuk össze.

Ezek és − mivel m = 0 esetben $\cos m\lambda = 1$ és $\sin m\lambda = 0$ − a velük alkotott (3311.10) alakú felületi gömbfüggvények $\sin\psi$-nek n-ed fokú polinomjai. Ennek megfelelően a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban n darab valódi nullahelyük (előjelváltásuk) van. A függvényértékek $-1 \le P_n \equiv Y_n \le +1$ értékhatárok közé esnek, és mivel a λ szögtől függetlenek, az egységgömb felszínén csak a geocentrikus szélességtől függő eloszlást mutatnak. A nullahelyek + és − előjelű övekre (zónákra) osztják az egységgömb felszínét. Innen származik a *zonális gömbfüggvények* elnevezésűk. A páros fokú zonális gömbfüggvények $\sin\psi$-nek csak a *páros*, a páratlan fokszámúak csak a *páratlan* hatványaiból álló polinomok, így ennek megfelelően páros ill. páratlan függvények, amelyek a ψ = 0 gömbi *egyenlítőre szimmetriás*, illetve *aszimmetriás* eloszlást mutatnak.

A *hozzárendelt (asszociált) Legendre-függvények* képezik a (3311.9) *Legendre*-függvények másik csoportját, ha m ≠ 0 értéktű. Ezek vagy a (3311.9) általános képletből, vagy a $P_n(t)$ n -ed fokú *Legendre*-polinomhoz a

$$P_{n,m}(t) = (1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dt^m}\,P_n(t) \qquad (3311.14)$$

összefüggéssel, a *Legendre*-polinom m-ed rendű differenciálásával számíthatók. Ezek $(n-m)$-ed fokú polinomok, amelyeknek ugyanennyi valós nullahelyük (előjelváltásuk) van a $-1 \le t \le +1$ azaz a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban.

A velük alkotott (3311.10) alakú felületi gömbfüggvények a λ szöget is tartalmazzák. Ennek megfelelően további $2m$ darab nullahelyük is van a $0 \le \lambda \le 2\pi$ tartományban. Ezek a felületi gömbfüggvények tehát a nullahelyeknek megfelelő ψ = állandó és λ = állandó vonalakkal határolt + és − előjelű függvényértékekkel jellemzett gömbi négyszögekre (tesszerákra) osztják az egységgömb felületét. Innen származik a *tesszerális gömbfüggvények* elnevezésűk.

Különleges eset, ha $n = m$, amikoris a hozzárendelt Legendre-függvényeknek és így a velük alkotott felületi gömbfüggvényeknek nincs nullahelyük a $-\pi/2 \le \psi \le +\pi/2$ tartományban. Ez esetben csak a $0 \le \lambda \le 2\pi$ tartományban kapott $2m$ számú nullahelyet adó λ = állandó vonalak osztják + és − előjelű függvényértékekkel jellemzett gömbi kétszögekre (szektorokra) az egységgömb felszínét. Ezért ezeket a felületi gömbfüggvényeket *szektoriális gömbfüggvényeknek* nevezik.

A gömbfüggvények szemléletes ábrázolása található a következő címen: http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/potato/Tutorial.html .

Feladatok:

- Számítsuk ki $\sin\psi$ n-ed fokú Legendre-polinomját és n-ed fokú, m-ed rendű hozzárendelt Legendre-függvényét az első néhány n értékre.
- Írjuk fel ezekkel a megfelelő felületi gömbfüggvényeket. Ábrázoljuk a zonális, a tesszerális és a szektoriális gömbfüggvények előjel szerinti eloszlását $n \leq 3$ esetre.
- Ábrázoljuk a $P_2(\sin\psi)$ és a $P_3(\sin\psi)$ zonális gömbfüggvény értékek eloszlását az egységgömbön.

331.2. A földi tömegvonzás potenciálfüggvénye gömbfüggvény alakban

A gömbi koordinátákban felírt (3311.1) *Laplace*-egyenletnek, mint parciális másodrendű differenciálegyenletnek általános megoldásaként a (3311.5), illetve a felületi gömbfüggvények részletesebb kifejtésével a (3311.12) alakú térbeli gömbfüggvénysort kaptuk. Ez tehát tartalmazza mindazon $V(r, \vartheta, \lambda)$ függvényalakokat, amelyek a *Laplace*-egyenletet kielégítik. Egyes konkrét függvényalakokra az egyelőre tetszőleges $c_{n,m}$ és $s_{n,m}$ együtthatók megfelelő megválasztásával juthatunk.

A geodéziai szemléletesség kedvéért használjuk ismét a $\psi = 90° - \vartheta$ gömbi koordinátát (ennek megfelelően $\cos\vartheta$ helyett $\sin\psi$-t kell írnunk) és vezessük be a

$$C_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{kMa^n} \quad \text{és} \quad S_{nm} = \frac{s_{n,m}}{kMa^n} \tag{3312.1}$$

jelölést, valamint emeljük ki a felületi gömbfüggvények közös $P_{n,m}$ $(\sin\psi)$ tényezőjét. Ily módon a (3311.12) a

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{kMa^n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda]\, P_{n,m}(\sin\psi) \tag{3312.2}$$

általános alakba írható.

Mivel a tömegvonzás potenciálfüggvénye a *forrásmentes külső térben* (1. feltétel!) kielégíti a *Laplace*-egyenletet, ez az általános alak a tömegvonzás potenciálfüggvényét is tartalmazza.

Tetszőleges test, így a földtömeg vonzási potenciálfüggvényére akkor jutunk, ha a (3312.2) általános alakban szereplő együtthatókat a következők szerint értelmezzük:

$$C_{n,m} = 2\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{1}{Ma^n} \int_{\text{Föld}} r_M^n\; P_{n,m}(\sin\psi_M) \cos m\lambda_M \, dM, \tag{3312.3a}$$

$$S_{nm} = 2\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{1}{Ma^n} \int_{\text{Föld}} r_M^n\; P_{n,m}(\sin\psi_M) \sin m\lambda_M \, dM, \tag{3312.3b}$$

illetve $m = 0$ esetben

$$C_n = \frac{1}{Ma^n} \int_{\text{Föld}} r_M^n\; P_n(\sin\psi_M)\, dM, \tag{3312.4}$$

ahol $(r_M,\ \psi_M,\ \lambda_M)$ a Föld tetszőleges $dM = r_M^2 \cos\psi_M\, dr_M\, d\psi_M\, d\lambda_M$ tömegelemének a gömbi koordinátái, $\vartheta = \vartheta(r_M,\ \psi_M,\ \lambda_M)$ most a sűrűség, M a Föld össztömege és a a Földet képviselő ellipszoid egyenlítői félátmérője.

A gömbfüggvénysor alakjában felírt tömegvonzási potenciálfüggvény együtthatóinak kiszámítására szolgáló (3312.3) és (3312.4) összefüggéseket megnézve, első tekintetre úgy tűnik, hogy ezek részünkre számszerűen éppen annyira nem használhatók, mint a potenciálfüggvény (132.3) alakja. Ugyanis itt is szükséges lenne a Föld sűrűségeloszlásának és alakjának ismerete az integrálok kiszámításához. Mielőtt azonban ebben a kérdésben véglegesen állást foglalnánk, nézzük meg a gömbfüggvénysor szóban lévő értelmezés szerinti együtthatóinak *fizikai tartalmát* legalább az első néhány n érték esetére.

Számítsuk ki a (3312.3) és (3312.4)-ben előírt integrálokban szereplő térbeli gömbfüggvényeket $n = 0, 1, 2$ esetre és a szemléletesség érdekében most helyettesítsük vissza ezekbe a tömegelem (x_M, y_M, z_M) derékszögű koordinátáit.

Figyelembe vesszük, hogy

$$\int_{\text{Föld}} dM = M \qquad (3312.5)$$

a Föld *össztömege*,

$$\frac{1}{M}\int_{\text{Föld}} x_M\, dM = x_0, \qquad \frac{1}{M}\int_{\text{Föld}} y_M\, dM = y_0,$$

$$\frac{1}{M}\int_{\text{Föld}} z_M\, dM = z_0 \qquad (3312.6)$$

a Föld *tömegközéppontjának koordinátái*,

$$\int_{\text{Föld}} (y_M^2 + z_M^2)\, dM = I_{xx} = A,$$

$$\int_{\text{Föld}} (z_M^2 + x_M^2)\, dM = I_{yy} = B \qquad (3312.7)$$

$$\int_{\text{Föld}} (x_M^2 + y_M^2)\, dM = I_{zz} = C$$

a Földnek az x, az y és a z tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi (inercia) nyomatékai,* melyeket a geodéziában szokásos módon rendre az A, a B és a C betűvel jelölünk, továbbá, hogy

$$\int_{\text{Föld}} x_M\, y_M\, dM = I_{xy} = D,$$

$$\int_{\text{Föld}} y_M\, z_M\, dM = I_{yz}, \qquad (3312.8)$$

$$\int_{\text{Föld}} x_M\, z_M\, dM = I_{xz}$$

a Földnek az (x,y), az (y,z) és az (x,z) tengelypárra vonatkozó *centrifugális másodrendű nyomatékai.*

A koordináta-rendszerünket úgy vesszük fel, hogy kezdőpontja (origója) a Föld tömegközéppontjával (2. feltétel!), z tengelye pedig a Földnek azzal a tehetetlenségi főirányával (főtengelyével) egybeessék, amelyre számított tehetetlenségi nyomatéka a legnagyobb (3. feltétel!). Ekkor a Föld tömegközéppontjának koordinátái és a z tengellyel (mint tehetetlenségi főiránnyal) kapcsolatos centrifugális másodrendű nyomatékai nulla értékűek.

Mindezek figyelembe vételével kapjuk az együtthatók első néhány értékére, hogy

$$C_{00} = 1,$$

$$C_{1,0} = C_{1,1} = C_{2,1} = S_{1,1} = S_{2,1} = 0, \qquad (3312.9)$$

továbbá

$$C_{2,0} = \frac{1}{Ma^2}\left(\frac{A+B}{2} - C\right), \qquad (3312.10)$$

$$C_{2,2} = \frac{1}{4Ma^2}\,(B-A) \quad \text{és} \quad S_{2,2} = \frac{1}{2Ma^2}\,D\,. \qquad (3312.11)$$

Látható, hogy a másodfokú tagok nullától különböző együtthatói a Föld másodrendű (tehetetlenségi és centrifugális) nyomatékait tartalmazzák, amelyek a *Föld össztömegének külső mechanikai hatásait tükrözik.* Hasonló a helyzet a többi együtthatókkal is.

Itt jegyezzük meg, hogy a másodfokú, nulladrendű együttható a sarki lapultsággal arányos, míg a másodfokú másodrendű együttható az egyenlítői lapultságra jellemző.

Szokásos jelölési mód (főként a szatellitageodéziában) a

$$J_{n,m} = -C_{n,m} \ldots\ldots\text{és}\ldots\ldots K_{n,m} = -S_{n,m}\,. \qquad (3312.12)$$

Ezzel a nullától különböző másodrendű együtthatók:

$$J_2 = \frac{C - \dfrac{A+B}{2}}{Ma^2}\,, \qquad (3312.13)$$

$$J_{2,2} = \frac{A-B}{4Ma^2} \quad \text{és} \quad K_{2,2} = -\frac{D}{2Ma^2}\,. \qquad (3312.14)$$

Szokásos végül a nulladrendű tagok együtthatóira a J_n és az m > 0 rendű tagok együtthatóira a $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ jelölést együttesen alkalmazni.

A nulla értékű tagok elhagyásával, valamint az m = 0 (nulladrendű) és az m > 0 rendű tagok külön csoportosításával kapjuk végeredményben a <u>*Föld vonzási potenciálfüggvényét gömbfüggvénysor alakjában:*</u>

$$V = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n\, P_n(\sin\psi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right].$$

(3312.15)

Szokásos még ugyanezt a gömbfüggvénysort a

$$V = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{J}_n\, \overline{P}_n(\sin\psi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\overline{C}_{n,m}\cos m\lambda + \overline{S}_{n,m}\sin m\lambda\right)\overline{P}_{n,m}(\sin\psi)\right]$$

(3312.16)

normalizált alakban is felírni, ahol

$$\overline{J}_n = \frac{J_n}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix}\overline{C}_{n,m}\\ \overline{S}_{n,m}\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}}\begin{bmatrix}C_{n,m}\\ S_{n,m}\end{bmatrix} \qquad (3312.17)$$

a normalizált gömbfüggvény együtthatók, továbbá

$$\overline{P}_n(\sin\ \psi) = \sqrt{2n+1}\ P_n(\sin\psi) \text{ és } \overline{P}_{n,m}(\sin\ \psi) = \left[2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2} P_{n,m}(\sin\psi)$$

(3312.18)

a normalizált Legendre-függvények.

A földi nehézségi erőtér potenciálfüggvényét pedig úgy kapjuk, ha a tömegvonzási potenciálhoz hozzáadjuk a forgásból származó (centrifugális) erőtér potenciálját:

$$W = W(r, \psi, \lambda) = V(r, \psi, \lambda) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\psi. \qquad (3312.\ 19)$$

Ennek gradiense pedig megadja a nehézségi térerősség

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}\, W = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial r} \\ \dfrac{\partial W}{r\,\partial\psi} \\ \dfrac{1}{r\cos\psi}\dfrac{\partial W}{\partial\lambda} \end{bmatrix} \qquad (3312.\ 20)$$

vektorát.

A (3312.15) vagy (3312.16) tömegvonzási potenciálfüggvény első tagja pontszerű, vagy gömbszimmetriás tömegeloszlású, gömb alakú M földtömeg *központos (centrális) eloszlású* vonzási potenciálját fejezi ki. A nullarendű tagok sora a Föld vonzási potenciáljának *forgásszimmetriás eloszlású* eltéréseit mutatják az előbbiekhez viszonyítva, míg az $1 \le m \le n$ -ed rendű ($m \ne 0$) tagok a földi tömegvonzásnak a hosszúságtól is függő (*általános eloszlású*) eltéréseit fejezik ki a gömb- és forgásszimmetriás eloszlástól.

A potenciálfüggvény gömbfüggvénysor alakja egyrészt azért előnyős a számunkra, mert ezzel jól szétválaszthatók a potenciál *gömbszimmetriás, forgási szimmetriás* és *általános eloszlású* részei. De ennél is fontosabb másik előny az, amit egyes gömbfüggvény együtthatók kiszámításakor láttunk, nevezetesen az, hogy ezek az *egész Föld (és tömegeloszlásának) külső mechanikai hatásait tükrözik,* így ezek az ilyen hatásokat tartalmazó mérések eredményeiből, a *Föld belső tömegeloszlásának (sűrűségeloszlásának) ismerete nélkül is számszerűen meghatározhatók*. Ennek módszerével később fogunk megismerkedni.

Feladatok:

- Gyűjtsük össze a vonzási potenciálfüggvény (3312.15) alakjának érvényességi feltételeit!
- Írjuk fel forgásszimmetriás erőtér vonzási potenciálfüggvényét gömbfüggvénysor alakjában.
- Írjuk fel a nehézségi térerősség gömbfüggvénysorát a $g \approx \left|\dfrac{\partial W}{\partial r}\right|$ közelítéssel.
- Bizonyítsuk, hogy az n = 0, 1. és 2. fokú gömbfüggvény együtthatók valóban a (3312.9), (3312.10) és (3312.11) értéket veszik fel.

7. Hét

332. A szintszferoidok

332.1. A szintszferoidok alapösszefüggései

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényét tetszőleges állandókkal egyenlővé téve, kaptuk az erőtér potenciáljának

$$W = W(\mathbf{r}) = \text{állandó}$$

egyenlettel leírható szintfelületeit. A W potenciálfüggvénybe a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysorát írva a függvény pontos értékére és a szintfelületek valódi alakjára akkor jutunk, ha az összegezést $n = \infty$ tagszámig végezzük el.

Ha azonban a potenciálfüggvény gömbfüggvénysora tagjainak összegezését valamely $n = k < \infty$, véges számnál abbahagyjuk (azaz a további, $n > k$-ad fokú tagokat nulla értékűnek tekintjük, vagy elhanyagoljuk), akkor a potenciálfüggvény pontos értéke (a valódi potenciál) helyett ennek k. fokú közelítését kapjuk. Az így nyert k. fokú közelítő potenciálfüggvényt a *normál potenciál* függvényének nevezzük, és megkülönböztetésül $U_k = U_k(\mathbf{r})$ - rel jelöljük.

A normálpotenciál függvényét különböző állandókkal egyenlővé téve a *normálpotenciál szintfelületeinek*, vagy más néven a k. fokú *szintszferoidoknak* az

$$U_k = U_k(\mathbf{r}) = \text{állandó}$$

egyenletére jutunk.

(A szintszferoidok elnevezés gyűjtőfogalom, amelybe beleértendő a szintszferoidok ∞ serege, ugyanis végtelen sok k értékkel végtelen sokféle fokú normál potenciálfüggvény írható fel, és ezek mindegyike végtelen sokféle állandóval egyenlővé tehető.)

A szintszferoidok potenciál- (vagy munka-) felületek, és ilyen értelemben valamely k. fokú szintszferoidok alkalmasak arra, hogy a valódi szintfelületek közelítő felületeként tekintsük őket. A Föld elméleti alakjának, a geoidnak a közelítőjét *normálszferoidnak* vagy *földi szferoidnak* nevezzük.

A normálpotenciál függvényéhez is tartozik valamilyen erőtér, amely erőtérnek a potenciálját írja le. Ezt a képzeletbeli erőteret nevezzük *normál nehézségi erőtérnek*. Ez annál közelebb áll a Föld valóságos nehézségi erőteréhez, minél kevesebb tagot hagytunk el a végtelen gömbfüggvénysorból.

A *normál nehézségi térerősség* $\boldsymbol{\gamma}$ vektorát a normálpotenciál

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}\ U_k$$

gradienseként értelmezzük.

A későbbi gyakorlati felhasználás érdekében általában arra törekszünk, hogy a normálpotenciál eloszlása, és ezzel a szintszferoidok alakja, lehetőleg egyszerű összefüggésekkel legyen leírható, ezért eleve elhagyjuk a gömbfüggvénysornak a λ hosszúságtól is függő, m > 0 rendű (tesszerális) tagjait és a megmaradó forgásszimmetriás eloszlású, m = 0 rendű zonális tagok közül is csak a *páros* fokszámú tagokra korlátozódunk, amelyek ψ-nek páros függvényei. Az így megmaradó gömbfüggvénysor által leírt normál potenciálfüggvény és ennek szintfelületei (a szintszferoidok) *forgási és egyenlítői szimmetriát* mutatnak.

A gyakorlatban ennek a gömbfüggvénysornak is csak az első egy néhány tagjára korlátozódunk.

A legegyszerűbb eset a $k = 0$ értékhez tartozó központos (centrális) erőtér lenne, de ez még túl durva közelítés a földi szintfelületek alakjára, ezért a gyakorlatban elfogadott legegyszerűbb esetben $k = 2$-ig összegezzük a sor tagjait. Így jutunk a *Clairaut* által levezetett, és róla elnevezett ***Clairaut*-féle szintszferoidra**. Ennek

$$U_2 = \frac{kM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^n J_2\, P_2(\sin\psi)\right]+\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2\cos^2\psi = \text{állandó} \qquad (3321.1)$$

egyenletében az U normálpotenciál függvénynek a 0. és a 2. fokú gömbfüggvény tagja szerepel.

Jó közelítéssel, ennek r szerinti parciális differenciálhányadosa abszolút értékeként kapjuk meg az U_2 potenciálfüggvényhez tartozó elképzelt, normál nehézségi erőtér *térerősségét*, ugyancsak gömbfüggvénysor alakjában

$$\gamma \approx \left|\frac{\partial U_2}{\partial r}\right| = \frac{kM}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi)\right] - \omega^2\, r\,\cos^2\psi. \qquad (3321.\ 2)$$

Ha $\psi = 0°$ és $r = a$, illetve $\psi = 90°$ és $r = b = a(1\text{-}f)$ helyettesítéssel kifejezzük a (3321.1)-ből az U normálpotenciál és a (3321.2)-ből a γ_e és γ_p normál nehézségi térerősség értékét a Föld elméleti alakját (a geoidot) helyettesítő normálszferoid felszínén az egyenlítőn és a sarkokon, akkor 4 összefüggésre jutunk, amelyben a normál nehézségi erőteret meghatározó összesen 8 mennyiség

$$(U,\ \gamma_e\ ,\ \gamma_p\ ,\ kM,\ J_2\ ,\ a,\ f \text{ és } \omega)$$

szerepel.

Fejezzük ki az első három egyenletből kM-et, U-t és J_2-t, és írjuk be ezek kifejezését a negyedikbe, amit végül oldjunk meg f-re. Így az

$$f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \qquad (3321.3)$$

nevezetes alakra, a <u>*szintszferoidok Clairaut-féle összefüggésére*</u> jutunk. Ennek jelentősége abban van, hogy lehetőséget nyújt a Föld elméleti alakját helyettesítő szintszferoid f *geometriai lapultságának meghatározására* az ω forgási szögsebesség és a szferoid a egyenlítői félátmérőjének ismeretében a normál nehézségi térerősség γ_p sarki és γ_e egyenlítői értéke, vagyis *fizikai jellegű mennyiségek alapján*.

A (3321.3) jobb oldali első tagjában az egyenlítői centrifugális és nehézségi térerősség arányát szokás m-mel és a második tagot pedig β-val jelölni. Ez utóbbit *nehézségi lapultságnak* is nevezzük. Itt jegyezzük meg, hogy használjuk még a potenciál gömbfüggvénysora 2.-fokú, nullarendű

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} \qquad (3321.4)$$

együtthatójára a *sztatikai lapultság* és tehetetlenségi nyomatékok

$$\frac{C-A}{C} \qquad (3321.5)$$

arányszámára a *dinamikai lapultság* elnevezéseket is.

Felhasználásukkal a szintszferoidok néhány összefüggése (az f geometriai lapultság 10^{-3} nagyságrendjéig, a $\psi \approx \varphi$ közelítéssel):

a *normál nehézségi térerősség* a φ földrajzi szélesség függvényében

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta \sin^2\varphi + \ldots), \tag{3321.6}$$

ahol a nehézségi lapultság

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = -\frac{3}{2} J_2 + 2m + \ldots; \tag{3321.7}$$

a szferoidi *helyvektor hossza*

$$r = a(1 - f \sin^2\varphi + \ldots), \tag{3321.8}$$

ahol

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} + \ldots \tag{3321.9}$$

a szintszferoid geometriai lapultsága. Végül a szferoidokra felírható *három alapösszefüggés* a hét meghatározó mennyiség között:

$$f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} m + \beta,$$

$$kM = \gamma_e\, a^2\, (1 - f + \frac{3}{2} m + \ldots), \tag{3321. 10}$$

$$U = \frac{kM}{a}\,(1 + f/3 + m/3 + \ldots).$$

Látható tehát, hogy a szintszferoid (a normál nehézségi erőtér) hét meghatározó mennyiségéből *elegendő négynek az ismerete*, a többi három a (3321.10) alap összefüggésekből már kiszámítható.

Ha a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysora tagjainak összegezését k = 4-ig végezzük el, és az így kapott függvényalakot írjuk a nehézségi erőtér potenciáljának (3312.19) kifejezésébe, akkor az

$$U_4 = \frac{kM}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2\, P_2(\sin\psi) - \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4\, P_4(\sin\psi)\right] + $$

$$+ \frac{1}{2}\,\omega^2\, r^2 \cos^2\psi = \text{állandó} \tag{3321.11}$$

egyenlettel jellemzett ***Helmert*-féle szintszferoidok** seregére jutunk. Ez esetben minden összefüggésünk további $f^{\,2}$, azaz 10^{-5} nagyságrendű tagokkal bővül. Így például a *normál nehézségi térerősség*

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta \sin^2\varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi + \ldots), \tag{3321.12}$$

ahol

$$\beta_1 = \frac{1}{8} f^2 - \frac{5}{8} f\, m. \qquad (3321.13)$$

A Helmert-féle szintszferoidok összefüggéseiben 13 meghatározó mennyiség szerepel, és közöttük 8 összefüggést lehet felírni. Így 5 kiinduló mennyiség ismeretében a többi már számítható.

A szintszferoidokat alkalmazni fogjuk a Föld alakját jól megközelítő méretű és alakú geodéziai alapfelület fizikai úton végzendő meghatározásához. Ennek részleteivel későbbben fogunk foglalkozni.

Feladatok:

- Gyűjtsük össze az eddig megismert lapultságfogalmakat!
- Számítsuk ki annak a Clairaut-féle szintszferoidnak a geometriai lapultságát és potenciálértékét, amelynek egyenlítői félátmérője megegyezik a Kraszovszkij-féle ellipszoid fél nagytengely hosszúságával, ha

$$\omega = 0{,}729\ 211\ 51 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}\ ,$$

$$\beta = 0{,}005\ 302 \qquad \text{és} \qquad \gamma_e = 9{,}780\ 30\ \mathrm{N/kg}.$$

332.2 A szintszferoidok egyes további összefüggései

A szintszferoidok a normálpotenciál szintfelületei, tehát munkafelületek, amelyeknek egymáshoz viszonyított potenciálkülönbsége állandó a felület egész kiterjedésében. Ez azt jelenti, hogy bárhol helyezünk át valamely (pl. egységnyi) tömeget az U_1 potenciálértékű szintszferoidról az U_2 szintszferoidra, azonos munkavégzés történik. A szintszferoid mentén azonban a normál nehézségi térerősség változik (az egyenlítőtől a sarkok felé folyamatosan növekszik), amit pl. a normál nehézségi térerősség (3321.6) alakú képletével lehet kifejezni. Következésképpen az U_1 és az U_2 potenciálértékű szintszferoidok távolsága is, a nehézségi térerősség változásával fordított arányban változik.

A *szintszferoidok távolságának megváltozása* a

$$h_1 - h_2 = h_1\, \beta \frac{\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1}{1 + \beta \sin^2 \varphi_2} \approx h_1\, \beta \sin 2\varphi\, \Delta\varphi \qquad (3322.1)$$

összefüggésből számítható. (A közelítő alak csak kis $\Delta\varphi$ szélességkülönbségekre érvényes!)

A nehézségi térerősségnek az egyenlítő és a sarkok közötti változása következtében a szintszferoidok közötti távolság tehát nem állandó, a *szintszferoidok a sarkok felé összehajlanak.* Ennek megfelelően a normál nehézségi erőtér erővonalai (függővonalai), amelyek a szintszferoidokra mindenhol merőlegesen haladnak, az egyenlítő felől nézve domború (konvex) görbék. Ha a földrajzi szélesség fogalmát a szintszferoiddal kapcsolatban is a felületi normálisnak a földi koordináta-rendszer Z tengelyére merőleges síkkal bezárt szögeként értelmezzük, akkor az erővonalak (függővonalak) görbültsége azt okozza, hogy az azonos függővonalon, de különböző magasságban fekvő szferoidi pontok földrajzi szélessége kis mértékben különböző. Más szóval a *földrajzi szélesség változik a magassággal.*

Ezt a változást kiszámíthatjuk, ha felírjuk a szintszferoidok távolságának $h_1 - h_2$ megváltozását a felület mentén valamely kis s távolságon és képezzük $(h_1 - h_2)/s$ arányukat. Ebből

$$\Delta\varphi'' = 0,171''\, H \sin 2\varphi, \qquad (3322.2)$$

ahol H a szintszferoidok egymástól mért távolsága km-ben.

Ezt az összefüggést a földfelszínen mért szintfelületi földrajzi szélességeknek a geoidra (tengerszintre) átszámításakor hasznosítjuk azzal a közelítéssel, hogy a valóságos nehézségi erőtér függővonalát a normál nehézségi erőtér erővonalával helyettesítjük.

A normál nehézségi <u>*térerősség változását a magasság függvényében*</u> a külső térben a

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -\frac{2\gamma}{\tilde{\tilde{R}}} - 2\omega^2 \approx -3086\ \mathrm{E} = -3086\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-2} = -3086\cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{N/kg}}{\mathrm{m}},$$

vagy

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -0{,}3086\ \mathrm{mGal/m}$$

normál függőleges gradiens fejezi ki, ahol

$$\frac{1}{\tilde{\tilde{R}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$$

a szintszferoid közepes görbülete. Ezt az összefüggést a nehézségi értékeknek a geoidra (tengerszintre) átszámításakor használjuk, és *tiszta magassági hatásnak* nevezzük.

Feladatok:

- Számítsuk ki az egyenlítőn egymás felett 100 m-re lévő szintszferoidok távolságát a sarkokon!
- Számítsuk ki, hogy mennyivel csökken a Magyarország déli szélén egymás felett 100 m-re haladó szintszferoidok távolsága az ország északi szélén. ($\Delta\varphi \approx 2°45'$.)
- Mennyivel változik a Kékestetőn mért szintfelületi földrajzi szélesség, ha átszámítjuk a geoidra? ($H \approx 1000$ m.)
- Mennyivel változik a normál nehézségi térerősség a BME központi épület magasföldszintje és a III. emelet szintje között, ugyanazon függőlegesben? (Tekintsük az emeletmagasságot kereken 6 m-nek.)

333. A nehézségi erőtér mérése és a nehézségi rendellenességek

A geodéziai alapfelület, a vonatkoztatási ellipszoid meghatározásának eddig megismert módszerei (a fokmérés és a felületek módszere) a nehézségi erő *irányát* (a helyi függőleges irányt) meghatározó geometriai jellegű mérések eredményeire támaszkodnak. A fizikai geodéziai módszerek, ezzel szemben, a nehézségi térerősség *nagyságának*, és a nehézségi erőtér *gradienseinek* a meghatározására végzett fizikai jellegű mérések eredményeit használják fel.

A fizikai geodézia módszereinek gyakorlati alkalmazásához így első sorban szükségünk van a földfelszín minél több pontjában mért *nehézségi értékekre*.

Ezeket a nemzetközi és országos nehézségi alappontokhoz csatlakozó nehézségi alaphálózat és gravitációs részletmérések keretében végzett abszolút és relatív nehézségi mérésekkel határozzák meg. A mért g érték mellett szükségünk van a mérési hely vízszintes (ellipszoidi földrajzi) koordinátáira és tengerszint feletti magasságára.

Emlékeztetünk arra, hogy annak érdekében, hogy a nehézségi térerősség rövidperiódusú időbeli változásától mérési eredményeinket megszabadítsuk [141.], belőlük a mérések után rögtön levonjuk az árapály hatását, és így foglaljuk őket adatbázisba. (Így válik lehetségessé ugyanazon a helyen, különböző időpontokban mért g értékek összehasonlítása.) Árapály-adatokat a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Földi Árapály Központjától* (International Center for Earth Tides = ICET, http://www.astro.oma.be/ICET/) kaphatunk.

(A nehézségi mérések eszközeivel és módszereivel a *Geofizikai alapismeretek*, a nehézségi alaphálózattal pedig a *Geodéziai alaphálózatok* tantárgy keretében ismerkedtek meg.)

Egyes feladatok megoldásához előnyösen hasznosíthatók a nehézségi erőtér vízszintes gradienseinek (a potenciálfüggvény egyes második deriváltjainak) meghatározására végzett mérések eredményei. Ennek hagyományos módszere az Eötvös-inga mérés, de most vannak fejlődésben az ennél gyorsabb, gazdaságosabb új mérési módszerek. Ennek eredményeként egyes földfelszíni pontokban, helyesebben a földfelszín egyes darabjain meglehetősen sűrű (1÷3 km) hálózatban kijelölt pontokban, vagy a Földön kívüli térségben megkapjuk a nehézségi erőtér W potenciálfüggvénye

$$W_{yy}-W_{xx}\,,\quad W_{xy}\,,\quad W_{zx} \text{ és } W_{zy}$$

második deriváltjainak számértékét.

(A mérés eszközeit és módszereit, valamint a mérési eredmények feldolgozását a Geofizika tantárgy tárgyalja.)

Felsőgeodéziai feladatok megoldásához általában nem magukat a mért nehézségi térerősség értékeket használjuk, hanem *eltérésüket* valamilyen (a Föld valóságos nehézségi erőterét jól közelítő, képzeletbeli) normál nehézségi erőtérben a mérési hely koordinátáinak megfelelő helyre kiszámított *normál nehézségi térerősségtől*. Ezek az eltérések a $\Delta g = g-\gamma$ *nehézségi rendellenességek.*

(Hasonlóan, mint a $\Theta(\xi,\eta)$ *függővonal-elhajlások,* vagy a *N geoid-ellipszoid távolságok,* amelyek *geometriai értelemben* jellemzik a szintfelületnek (pl. a geoidnak) valamely „közelítő értékként" felfogható szabályos matematikai felülethez (ellipszoidhoz) viszonyított eltéréseit; fizikai értelemben a Δg *nehézségi rendellenességek* a valóságos szintfelületeknek (pl. a geoidnak) – az ugyancsak „közelítő értékként" felfogható szabályos, elképzelt, normál nehézségi erőtér szintfelületeihez viszonyított eltéréseit mutatják. Ez, tehát most már a harmadik olyan mérőszám, amely valódi felületnek valamilyen képzeletbeli, szabályos (közelítő) felülethez viszonyított helyzetét jellemzi.)

Attól függően, hogy a meghatározandó felületünk a Föld fizikai, vagy matematikai (elméleti) alakja, képezzük a nehézségi rendellenességet a földfelszíni, vagy geoidi pontban, és beszélünk *földfelszíni,* vagy *geoidi nehézségi rendellenességről.*

A **földfelszíni** Δg_P **nehézségi rendellenesség** számításához a földfelszínen ténylegesen mért (és az árapály-hatástól megszabadított) g_P értékeket vetjük össze valamilyen normálértékkel. Ennek részleteivel később fogunk foglalkozni [533.].

A **geoidi** $\Delta g_{P'}$ **nehézségi rendellenesség** kiszámításához a földfelszíni P pontunk P′ geoidi megfelelőjében kellene ismernünk az itteni $g_{P'}$ nehézségi értéket. Ez a geoidi pont azonban a szárazföldek területén a felszín alatt, a Föld belsejében fekszik, ahol mérni nem tudunk. A másik áthidalandó nehézség az, hogy a későbbi felhasználás matematikai összefüggései a Föld tömegén kívüli, külső nehézségi erőtérre érvényesek [522.]. Így tehát a geoid meghatározásához felhasználandó $\Delta g_{P'}$ nehézségi rendellenességeket olyan $g_{P'}$ értékekből kell számítanunk, amelyeket a *geoidon (tengerszinten mérnénk, úgy, mintha felette tömegek nem lennének* (vagyis mintha a geoid a Föld tömegének határoló felülete lenne).

A földfelszínen mért g_P értékekből ilyen geoidi $g_{P'}$ értékeket különböző *fizikai modellek* segítségével számolunk. Ezt a műveletet nevezzük a nehézségi mérések tengerszintre (geoidra) átszámításának (redukálásának). Többféle ilyen modell terjedt el a gyakorlatban, közülük fogunk néhányat megismerni.(Ezzel a kérdéssel más szempontból a Geofizika tantárgyban is találkoztak, így az ott is használt fogalmakat a továbbiakban már ismertnek tekintjük.)

A földfelszíni nehézségi értékek geoidra átszámításának *Bouguer-féle modelljében* először a geoid feletti szárazföldi tömeget a mérési hely H magasságának megfelelő, minden irányban végtelen kiterjedésű sík-párhuzamos lemeznek tekintve, kiszámítjuk ennek tömegvonzását a lemez szélére (δg_B *Bouguer*-féle *hatás*). Ezt a P pontbeli mért értékből levonva, olyan g értékre jutunk, amit – feltételezésünk szerint – ott mérnénk, ha alatta a tengerszintig tömegek nem lennének. A számítás második lépésében ehhez hozzáadjuk a δg_F *Faye*-féle, vagy *tiszta magassági* hatást, ami azt mutatja, hogy mennyit változik a térerősség, ha forrásmentes (légüres) térben a P pontból a pont magasságának megfelelő mértékben a Föld vonzó tömegéhez közelebb kerülünk. Eredményül (a modellnek megfelelő közelítéssel) azt a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_F \tag{333.1}$$

geoidi nehézségi értéket kapjuk, amit a geoidon mérnénk, *ha felette tömegek nem lennének.* Az ezzel számított $\Delta g_{P'}$ *Bouguer*-féle *nehézségi rendellenességek* eloszlása a geoid felszínén viszonylag sima lefutású, jól interpolálható. Hátránya, hogy az átszámítással

- megváltozott a Föld össztömege és ezáltal
- áthelyeződött a tömegközéppontja.

E két utóbbit együttesen *közvetett (indirekt) hatásnak* nevezzük, ami ennél a modellnél meglehetősen nagy. Ezért a geodéziában kevésbé, inkább csak közvetetten használjuk. (Geofizikában elterjedten alkalmazzák más célra.)

A *javított Bouguer-féle modellben* további δg_t javítással figyelembe vesszük a mérési hely környezetében a pont vízszintes síkja (a *Bouguer*-lemez felső határoló síkja) alatti és feletti domborzati formák tömegvonzási hatását a P pontbeli egységnyi tömegre, és a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_F \tag{333.2}$$

alakból számítjuk (a modellünknek megfelelő közelítéssel) azt a nehézségi értéket, amit a geoidon mérnénk, ha fölötte tömegek nem lennének. A vele számított geoidi nehézségi rendellenességek az előbbiekben említett tulajdonságokat mutatják, alkalmazásuk is azokéval megegyező, de a számítás az előbbinél sokkal munkaigényesebb.

Ha a nehézségi értékek geoidra átszámításakor az *izosztatikus kiegyenlítődés elvét* alkalmazzuk, akkor a geoid feletti tömegeket úgy rendezzük át, hogy velük a mélységben lévő tömeghiányokat „kipótoljuk”. Ezt a δg_{izo} izosztatikus javítással vesszük számításba, és a geoidi nehézségi értéket a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_{izo} + \delta g_F \tag{333.3}$$

alakból számítjuk. Az ezzel számított *izosztatikus nehézségi rendellenességek* igen sima lefutású, jól közepelhető és interpolálható kicsi értékek. A modell hátránya, hogy a számítás nagyon munkaigényes, és ennek is még nagy a közvetett hatása (a képzeletbeli tömegátrendezés miatt). Ezek ellenére korábban több példa volt geodéziai alkalmazására.

Az eddigieknél több szempontból kedvezőbb a *Helmert-féle kondenzációs modell.* Ennek alkalmazásakor a geoid feletti tömegeket nem távolítjuk el, hanem képzeletben igen vékony, de nagy sűrűségű rétegbe a geoid alá tömörítjük. Ennek vonzó hatását a δg_{kond} javítással vesszük figyelembe, és a

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_t + \delta g_{kond} + \delta g_F \tag{333.4}$$

alakból számítjuk a geoidi nehézségi értéket.

A δg_{kond} kondenzációs javítás kiszámításának legegyszerűbb módja, ha a geoid alá sűrített tömeget is végtelen kiterjedésű sík-párhuzamos lemeznek tekintjük, és a már ismert módon számítjuk a lemezben foglalt tömeg vonzó hatását a lemez szélén fekvő pontban képzelt 1 kg tömegre. Mivel ez a vonzó hatás nem függ a lemez vastagságától, csak a benne foglalt tömeg nagyságától, – ami feltételezésünk szerint megegyezik a geoid feletti, ugyancsak sík-párhuzamos lemeznek tekintett tömeg nagyságával – a hatás ugyancsak δg_B , csak most pozitív előjellel.

Ezen megfontolás alapján a (34.4)-be δg_{kond} helyett δg_B –t írva, és a domborzat viszonylag kicsi δg_t hatását elhanyagolva, a

$$g_{P'} = g_P + \delta g_F \qquad (333.5)$$

nagyon egyszerű alakra jutunk. ami éppen (a Geofizika tantárgyból ismert) *Faye-féle modell.* Az előbbiekből kitűnik, hogy ehhez az – első tekintetre ugyancsak önkényesnek tűnő – egyszerű számítási módhoz is tartozik fizikai modell, nevezetesen a *Helmert*-féle *kondenzációs modell.*

A (333.5)-tel számított *Faye*-féle *nehézségi rendellenességek* a domborzati formákat tükröző igen változatos, ezért nehezen interpolálható értékek. Ennek ellenére a geodéziában a legelterjedtebben használjuk őket, bizonyára a számításuk egyszerűsége következtében. További előny a viszonylag csekély közvetett hatás.

Itt jegyezzük meg, hogy a tengerszint (geoid) feletti *magasság* [531.2] számításához olyan nehézségi értékre van szükségünk, amit a Föld belsejében mérnénk, úgy, hogy *minden tömeg a helyén van.* Ez esetben is először számítással eltávolítjuk a P′ pont feletti tömegeket (*Bouguer*-féle javítás),majd a *Faye*-féle (tiszta magassági) hatással átszámítjuk a P-ben mért értéket a P′pontba, és végezetül visszahelyezzük a (sík-párhuzamos lemezként) eltávolított tömegeket eredeti helyükre (most már a P′ pont fölé), ugyancsak a *Bouguer*-féle javítással. Ezzel

$$g_{P'} = g_P - 2\delta g_B + \delta g_F \qquad (333.6)$$

Ez a *Poincaré-Prey-féle modell.* (Ezekkel az értékekkel nehézségi rendellenességeket *nem számítunk.*)

A mért (és árapály-javítással ellátott) nehézségi értékeket, továbbá a belőlük számított *Bouguer-* és *Faye-féle* nehézségi rendellenességeket, a mérési hely vízszintes és magassági koordinátáival együtt digitálisan adatbázisba rendezve gyűjtik ezzel foglalkozó nemzeti és nemzetközi intézmények, szervezetek.

Geodéziai célokra az egyes pontokra vonatkozó eredményekből különböző sűrűségű (pl. 1°x1°, vagy 0,5°x0,5°, vagy még sűrűbb) rácshálózatok sarokpontjaira interpolált értékeket állítanak elő, illetve középértékeket képeznek az egyes rácsmezőkre (a rácsmező geometriai középpontjára).

A kapott nehézségi rendellenességeket analóg módon *átlag-anomália,* vagy *izoanomália térképeken* szemléltetik.

A nehézségi adatokat az egész Földre kiterjedően a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Gravimetriai Irodája* (International Gravimetric Bureau = BGI) gyűjti, és teszi mindenki számára hozzáférhetővé (http://bgi.cnes.fr).

8. Hét

34. A normál nehézségi erőtér meghatározása a potenciálfüggvény sorbafejtésével

A normál nehézségi erőtér és a Föld normálalakjának (együttesen, a geodéziai földmodellnek) meghatározására a legrégibb módszer a Föld valóságos potenciálfüggvényének sorbafejtésén alapszik.

Ha a vonzási potenciál (3312.15) gömbfüggvénysorában a [332.1]-ben tárgyalt módon csak a forgási és egyenlítői szimmetriás eloszlású tagokat tartjuk meg, akkor a nehézségi erőtér potenciálját közelítő U normál potenciálfüggvény gömbfüggvénysorára jutunk.

Ha ebben k véges számú tagra korlátozódunk, azaz a végtelen sort a k. tag után elvágjuk, és az összes további tagokat nullával egyenlőnek tekintjük, akkor a k. fokú U_k függvény a k számtól függően többé-kevésbé jól közelíti meg a Föld valóságos nehézségi erőterét, viszont matematikailag könnyebben kezelhető. Legegyszerűbben az így nyert, U_k függvénnyel leírt nehézségi erőteret tekinthetjük *normál nehézségi erőtérnek*. Ennek szintfelületei az U_k = állandó potenciálértékű k. fokú szintszferoidok. Ekkor a *Föld normálalakja* az a szferoid, amelynek méretei a Föld méreteit jól megközelítik.

Láttuk, hogy a legegyszerűbb esetben, ha $k = 2$, akkor az ún. *Clairaut*-féle szferoid (3321.1) egyenletére jutunk.

Határozzuk meg a Föld másodfokú szintszferoidként értelmezett normálalakját és a hozzá tartozó normál nehézségi erőteret. Erre vonatkozóan *Clairaut* a (3321.10) három összefüggést vezetett le (az f lapultság $1/300 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ nagyságrendjéig terjedő viszonylagos pontossággal). Ebben a három egyenletben a normálszferoidnak 7 ismeretlen jellemzője szerepel, úgymint

$$a, f, kM, U, \beta, \gamma_e, \omega.$$

Kiszámításukra a három egyenlet kevés, tehát négy ismeretlennek az értékét más úton kell meghatározni. Ezek közül a Föld forgásának ω szögsebessége nagy pontossággal ismert.

A Föld normálalakja a nagytengely-hosszának értékét átvehetjük a geometriai meghatározásokból (fokmérések, felületek módszere stb.).

Harmadik és negyedik adatként γ_e és β értékét szokás tapasztalati úton, mérésekkel meghatározni.

Mint ismeretes a szferoid felszínén valamely φ_i földrajzi szélességű helyen a γ_i normál nehézségi térősséget (ugyancsak a lapultság nagyságrendjéig terjedő viszonylagos pontossággal, vagyis az egység mellett az f^2 nagyságrendű negyedfokú és ennél kisebb nagyságrendű tagokat elhanyagolva) a (3321.6) adja. Ha a földfelszín különböző helyein mért és a tengerszintre (geoidra) átszámított $\mathbf{g}_{P_i'}$ nehézségi értékeket ezzel összevetjük, különbségükre a

$$\Delta g_i = \mathbf{g}_{P_i'} - \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi_i)$$

kifejezést kapjuk, az egyelőre ismeretlen γ_e és β értékkel. Ezt n számú mérési helyre felírva, a $\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i^2$ = minimum feltétellel γ_e és β számértéke a legkisebb négyzetek módszerével számítható a mérési eredmények alapján. Ilyen például *Helmert* 1884-i meghatározásának eredménye

$$\gamma_e = 9{,}780\ 00 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}\text{) és}$$

$$\beta = 0{,}005\ 310.$$

(A korszerűbb meghatározások már a negyedrendű tag figyelembevételével, tehát $f^{\,2}$ viszonylagos pontosságig történtek. Lásd később.)

A felvett négy mennyiség alapján a többi három meghatározó adat, vagyis *f, kM* és *U* a (3321.10) összefüggésekből már számítható. Ezzel meghatároztuk a Föld *a* és *f* méretű és alakú 2. fokú szintszferoidként értelmezett *normálalakját,* ennek *U potenciálértékét,* felszínén a γ_e és β paraméterekkel számítható *normál nehézségi térerősséget,* ezekkel a *normál nehézségi erőteret.*

Továbbmenve a *k Newton*-féle tömegvonzási állandó tapasztalati úton meghatározott értékének felhasználásával a kapott *kM*-ből a Föld normálalakjának (ami megközelítően a Földnek is) az *M* tömege számítható.

Így a Föld tömegére

$$M \approx 5{,}976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

adódik. Kiszámítva a normálalak térfogatát, ez jó közelítéssel

$$K = \frac{4}{3}\,\pi\, a^3\,(1 - f), \tag{34.1}$$

és a Föld átlagos sűrűsége

$$\vartheta = \frac{M}{K} = 5\ 520 \text{ kgm}^{-3}$$

körüli értéknek adódik.

A potenciálfüggvény 2. fokig terjedő sorbafejtésével meghatározott geodéziai földmodell bizonytalansága a magasabb fokú tagok elhanyagolása miatt túl nagy. Így például a minket közvetlenül érdeklő nehézségi térerősség eloszlását is csak az *f* nagyságrendnek megfelelő (1/300) pontossággal írja le, ami a korszerű abszolút nehézségi méréseink $\pm\ 2 \div 5 \cdot 10^{-8}$ N/kg (vagy $\pm\ 2 \div 5$ μGal) megbízhatóságával aligha vethető össze. Ugyancsak a magasabb fokú tagok elhanyagolása miatt a Föld valódi szintfelületeinek, így normálalakjának is csak durva közelítését jelenti a 2. fokú szintszferoid.

Jobb közelítést kapunk, ha *Helmert* nyomán a potenciálfüggvény végtelen sorából $k = 4$. fokig terjedő tagokat vesszük figyelembe. Ekkor a normál nehézségi erőtér potenciálját a (3321.11) fejezi ki. Mint tudjuk a Föld negyedfokú szintszferoidként értelmezett normálalakjára vonatkozóan *Helmert* összesen 8 összefüggést állított fel a szferoid 13 jellemzője között. A szferoid meghatározásához tehát 5 mennyiségnek az értékét kell ismerni, ill méréssel meghatározni.

Láttuk, hogy ez esetben a nehézségi térerősségnek az eloszlását a szferoidon leíró (3321.12) képlet is bővült az $f^{\,2}$ nagyságrendű (negyedrendű) taggal. Így az *a* és az ω értéke mellett a nehézségi mérésekből γ_e , β és β_1 határozható meg. Ezzel megvan az 5 kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó tapasztalati értéke. A normál nehézségi erőtér és a Föld normálalakjának további 8 jellemzője a Helmert-féle 8 összefüggésből kiszámítható. A (3321.12) állandóinak tapasztalati meghatározására példaként *Helmert* 1901. évi meghatározásának eredményét adjuk meg:

$$\gamma_e = 9{,}780\ 30 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}),$$

$$\beta = 0{,}005\ 302,$$

$$\beta_1 = -0{,}000\ 007.$$

Ha ezeket az értékeket helyettesítjük a Helmert-féle összefüggésekben is szereplő, de negyedfokú tagokkal is kiegészített *Clairaut*-képletbe, akkor f = 1/298,3-t kapunk a Föld normálalakjának lapultságára, ami legkorszerűbb ismereteinknek is megfelel.

A geodéziai földmodell meghatározásának újabb lehetőségét nyitották meg a mesterséges holdak. Mint láttuk a Kozmikus geodézia tantárgyban [332], a pályamozgásuk megfigyeléséből közvetlenül a kM szorzat és a J_2, J_4 ... stb. gömbfüggvény-együtthatók számértéke határozható meg. Így a *Helmert*-féle egyenletrendszer megoldhatóvá vált a

$$kM,\ J_2,\ J_4,\ \omega,\ a$$

kiinduló mennyiségeknek a valódi Földre vonatkozó értékével. Ebből t*ehát a normálalak f* lapultsága és a *normál nehézségi erőtér* γ_e, β, β_1, stb, további meghatározó mennyiségei számíthatók.

A szintszferoid a vele egyenlő tengelyhosszúságú ellipszoidot a sarkokon és az egyenlítőn természetesen érinti, közöttük a szferoid teljes terjedelmében az ellipszoidon belül fekszik, és legnagyobb eltérése közel 7 m. Mivel a szintszferoid az ellipszoidnál sokkal bonyolultabb felület, és ezért rajta a felületi koordináták számítása igen nehézkes lenne, a gyakorlatban *vonatkoztatási felületként* soha nem használták. Ha a geodéziai földmodellt ezen az úton határozzuk meg, akkor a koordináta-számításhoz szolgáló vonatkoztatási felület a Föld normálalakjával egyenlő tengelyhosszúságú *forgási ellipszoid* (*vonatkoztatási ellipszoid.)*

Az ily módon levezetett geodéziai földmodell meghatározását, mint láttuk, sikerült teljesen függetleníteni a Föld *belső tömegeloszlásának* ismeretétől (helyesebben nem ismeretétől), mert a meghatározásban csak a Föld egészének külső mechanikai hatásait tükröző mennyiségek (nehézségi térerősségek, tehetetlenségi nyomatékok, a Föld össztömege, stb.) szerepelnek, és a belső tömegeloszlásra csak azt a feltevést tettük, hogy ez forgási és egyenlítői szimmetriás.

A megoldás hátránya, ami miatt ezt tovább kellett fejleszteni, az, hogy míg a kiszámított normál nehézségi térerősségek a Föld *szintszferoid* alakú *normálalakja* felszínére vonatkoznak, és velük, pl. a geoidnak a *szintszferoid feletti magasságát* tudjuk közvetlenül számítani, addig a vízszintes koordinátákat a *vonatkoztatási ellipszoidon* számítjuk. Ennek a kettősségnek a megszüntetése vált lehetségessé a geodéziai földmodell meghatározásának következő módszerével.

35. A geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározása szintellipszoiddal

351. A megoldás alapelve

A Föld normálalakja, bizonyos célszerűségi határokon belül, fizikai értelemben is önkényesen is megválasztható. Erre a lehetőséget *Stokes* és *Poincaré* tétele adja meg. Ennek értelmében az adott ω szögsebességgel forgó M tömeg S külső szintfelületének önkényes felvétele után a felvett szintfelületen a γ normál nehézségi térerősség, illetve külső terében az U normálpotenciál az (M, S, ω) ún. *Stokes-féle elemek* függvényében egyértelműen számítható anélkül, hogy az M tömegnek S-en belüli eloszlásáról bármit is tudnánk. (A tömegeloszlást ugyanis az S szintfelület választott alakja már meghatározza, de ennek milyenségét nem kell ismernünk.) Ennek megfelelően tehát a normálpotenciálnak valamely szintfelületét, célszerűen éppen a Föld normálalakját önkényesen felvesszük, úgy, hogy céljainknak a legjobban megfeleljen.

A célszerűség pedig azt kívánja, hogy a Föld normálalakjaként éppen a geodéziai vonatkoztatási felületként szolgáló *forgási ellipszoidot* vegyük fel. Ha ezt a Föld M tömegével kitöltve képzeljük, továbbá feltételezzük, hogy kistengelye körül a Föld állandónak képzelt forgási sebességével forog, akkor ez az *ellipszoid alakú szintfelület* (*szintellipszoid*) lesz a Föld *normálalakja* és külső potenciálja a *normálpotenciál*. Az M tömegnek a felszínét képező szintellipszoidon belüli eloszlása ismeretlen.

Hangsúlyozzuk, hogy ez esetben az ellipszoid nem valamely szintszferoid közelítő felületeként szerepel, hanem ténylegesen *ellipszoid alakú szintfelület* felvételéről van szó. A normálpotenciálnak azonban csak *ez az egyetlen* szintfelülete lesz ellipszoid alakú, amit ennek vettünk fel**,** az összes többi külső szintfelülete az ellipszoidnál nagyobb lapultságú szintszferoid lesz.

A geodéziai földmodellt (a Föld normálalakját és a normál nehézségi erőteret) meghatározó

$$a,\ b,\ \omega,\ kM,\ \gamma_e\ ,\gamma_p\ ,\ U_0$$

hét mennyiség között, ez esetben is, három potenciálelméleti összefüggés írható fel. Következésképpen itt is négy kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó számértékét kell ismernünk. Ezek lehetnek a *Stokes-Poincaré*-tétel bemutatásakor már említettek, de lehetnek – velük egyenértékű – mások is. Ha például (későbbi gyakorlati esetnek megfelelően) az a, b, ω, γ_e *Stokes*-féle elemek számértékéből indulunk ki, ahol *a és b* célszerűen a koordinátaszámításaink vonatkoztatási felületéül szolgáló ellipszoid a fél nagytengelyének és b fél kistengelyének a hossza, akkor a hiányzó három mennyiség a

$$\begin{aligned} &\beta = \beta(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e), \\ &kM = kM(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e)\ \text{ és} \\ &U_0 = U_0(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e) \end{aligned} \qquad (351.1)$$

három potenciálelméleti összefüggésből számítható (közülük az első az ellipszoidra módosított *Clairaut*-képlet). A hét meghatározó mennyiség ismeretében a normál nehézségi erőtér minden további jellemzőjét ki tudjuk számítani.

A felvett méretű szintellipszoid felszínén a *normál nehézségi térerősség* eloszlása is már egyértelműen meghatározott (a tömegeloszlás ismeretétől függetlenül) és *Somigliana*

$$\gamma = \frac{a\ \gamma_e \cos^2\varphi + b\ \gamma_p \sin^2\varphi}{\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}} \qquad (351.2)$$

zárt képletéből nyerhető, ahol φ az ellipszoidi szélesség. Ennek sorbafejtett alakja

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta \sin^2\varphi + \beta_l \sin^2 2\varphi + \ldots). \qquad (351.3)$$

(Ezekben $\gamma_p = \gamma_e\,(1+\beta)$, továbbá $\beta_1 = \beta_1(f,\ m)$, vagyis $\beta_1 = \beta_1(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e)$.)

A normál nehézségi erőtér potenciálja (a *normálpotenciál*) az

$$U = \frac{kM}{r}\left[1 - J_2^*\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\vartheta) - J_4^*\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\vartheta) - \ldots\right] + \omega^2 r^2 \sin^2\vartheta \qquad (351.4)$$

gömbfüggvénysorral írható le, ahol

$$J_2^* = J_2^*\,(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e),$$

$$J_4^* = J_4^*(a,\ b,\ \omega,\ \gamma_e),$$

. . . .

a normál nehézségi erőtér eloszlását jellemző gömbfüggvény-együtthatók.

Látható tehát, hogy ezen az úton lehet olyan normál nehézségi erőteret (és ennek minden jellemzőjét) kiszámítani, melynek egyik szintfelülete ellipszoid alakú (szintellipszoid), amely magába zárja a Föld össztömegével megegyező nagyságú tömeget (a Föld normálalakja). A szintellipszoid méreteit megválaszthatjuk úgy, hogy ezek éppen geodéziai vonatkoztatási ellipszoidunk méretei legyenek.

Mivel a (351.2) a γ normál nehézségi térerősség eloszlását a szintellipszoid felszínén írja le, ezen az úton megszűnt az a kettősség, ami a Föld szferoidi normálalakjának geodéziai alkalmazásakor fellép. Nevezetesen az, hogy más felület a koordináta-számítás vonatkoztatási felülete (a vonatkoztatási ellipszoid), mint amelyen a normál nehézségi térerősség eloszlását ismerjük (szintszferoid).

A geodézia a XX. századtól már csak ezt a megoldást alkalmazza a geodéziai földmodell és ezzel a vonatkoztatási rendszer meghatározására. A következőkben bemutatjuk ennek néhány gyakorlati alkalmazását.

352. Gyakorlati megoldások

A geodéziai gyakorlat során első ízben a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) 1924. évi közgyűlésén *nemzetközi ellipszoidnak* nyilvánított ***Hayford*-féle ellipszoidhoz** határozták meg azt a normál nehézségi erőteret, amelynek ellipszoid alakú szintfelülete éppen ez az ellipszoid.

Kiinduló adatként tehát adottak voltak a *Hayford*-ellipszoid

a = 6 378 388 m és

f = 1/297

jellemzői. Ehhez járult a forgási szögsebesség már akkor jól meghatározott

$\omega = 0{,}729\ 211\ 51 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$

értéke, és negyedik kiinduló adatként *Heiskanen* meghatározásából elfogadták a

$$\gamma_e = 9{,}780\ 490 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}\text{)}$$

egyenlítői nehézségi értéket.

Ezek alapján az ellipszoidra módosított *Clairaut*-féle képletből *Cassinis* 1930-ban kiszámította a normál nehézségi térerősség (3431.2) képletének β együtthatóját. A lapultság négyzetének nagyságrendjéig az ellipszoidra is érvényes (3321.13)-ból pedig meghatározta a β_1 együtthatót f és m függvényében.

Így a *Heiskanen*-féle γ_e értékkel és a *Cassinis* által számított β és β_1 együtthatókkal felírható

$$\gamma = 9{,}780\ 490\,(1{+}0{,}005\ 2884 \sin^2\varphi - 0{,}000\ 0059 \sin^2 2\varphi) \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}\text{)}$$

(3431.3) sorbafejtett alakú képlet megadja a normál nehézségi térerősség eloszlását a *Hayford*-féle ellipszoid felszínén. Ezt az ily módon előállított összefüggést *Cassinis*-féle *normál nehézségi képletnek* nevezik és hosszú időn keresztül <u>*nemzetközi normál nehézségi képletként*</u> használták (használtuk Magyarországon is).

A kiinduló adatokból potenciálelméleti összefüggésekkel kiszámíthatók a normál nehézségi erőtér további jellemzői

$$U_0 = 6{,}263\ 9787\cdot 10^7 \text{ J/kg (vagy m}^2\text{s}^{-2}\text{)},$$

$$kM = 3{,}986\ 3290\cdot 10^{14} \text{ Nm}^2\text{/kg (vagy m}^3\text{s}^{-2}\text{)},$$

$$J_2^* = 1092{,}0\cdot 10^{-6} \text{ és}$$

$$J_4^* = -\,2{,}43\cdot 10^{-6}.$$

U_0 így kiszámított értékét (jobb hiányában) a geoid (nem mérhető) W_0 *valódi potenciálértékének is*, a *kM* szorzatra kapott számértéket a *valódi Föld tömege* jellemzőjének is tekintjük. A földmodell, illetve a vonatkoztatási rendszer elemein keresztül így vált lehetségessé a geoid potenciálértékének, és a Föld tömegének közvetett meghatározása az ellipszoidi normálalak meghatározására szolgáló geometriai (szög- és távolság-), valamint a földfelszíni nehézségi mérésekből.

A múlt század közepétől az akkori ún. európai szocialista országok által közös nemzetközi vonatkoztatási felületként használt

$$a = 6\ 378\ 245 \text{ m és}$$

$$f = 1/298{,}3$$

méretű és lapultságú ***Kraszovszkij*-féle ellipszoidhoz** egyszerűbben lehetett megfeleIő normál nehézségi erőteret rendelni.

Szerencsés véletlen folytán ugyanis *Helmert 1901. évi normál nehézségi képletének* az akkori 1400 földfelszíni és a geoidra átszámított nehézségi mérésből számított

$$\gamma_e = 9{,}780\ 30 \text{ N/kg (vagy ms}^{-2}\text{)},$$

$$\beta = 0{,}005\ 302 \text{ és}$$

$$\beta_1 = -0{,}000\ 007$$

együtthatói gyakorlatilag elegendő összhangban vannak a Kraszovszkij-ellipszoid adataival, így *Helmert* képletét változtatás nélkül alkalmazták a normál nehézségi térerősség eloszlásának Ieírására a *Kraszovszkij*-ellipszoid felszínén. Az összhangot az mutatja, hogy, ha a szintellipszoidra vonatkozó *Clairaut*-képletbe a *Kraszovszkij*-ellipszoid jellemzőit, a *Helmert*-féle γ_e-t és ω már ismert értékét beírjuk, eredményül gyakorlatilag a β *nehézségi lapultság Helmert*-féle értékét kapjuk.

Az 1960-as évek folyamán mind a csillagászok, mind a geodéták úgy ítélték meg, hogy az utolsó évtizedekben – főként a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelése révén – szerzett ismereteink tükrében sem a nemzetközinek tekintett *Hayford*-féle ellipszoid mérete és alakja, sem pedig az ezen, mint szintellipszoidon, a normál nehézségi térerősség eloszlását kifejező nemzetközi, vagy (*Cassinis*-féle) normál nehézségi képlet nem alkalmas arra, hogy a Föld méreteit, nehézségi erőterét, külső mechanikai hatásait kellően jól közelítse. Felmerült tehát annak a szükségessége, hogy mind a csillagászat, mind a geometriai és a fizikai geodéziai módszerek számára a nemzetközi szervezet új, megfelelőbb vonatkoztatási rendszert határozzon meg és ajánljon használatra a tagországoknak.

A vonatkoztatási rendszer meghatározásának alapelvét illetően a geodéták többsége továbbra is a *szintellipszoiddal* végzendő megoldást kívánta követni. Sok vitát váltott ki azonban a szükséges négy kiinduló mennyiség kérdése.

A vonatkoztatási rendszert meghatározó kiinduló adatok megállapításakor alapvető szempontként a *feltevésmentességre törekvés* került előtérbe. Ennek megfelelően célszerű kerülni minden olyan mennyiségnek felvételét kiinduló adatként, amelynek számértékét csak különböző feltevések mellett lehet meghatározni. Ilyenek helyett a vonatkoztatási rendszert, lehetőleg, mérési eredményekből közvetlenül (feltevések nélkül), azaz *egyértelműen* számítható értékekkel kívánatos meghatározni.

Ebből a szempontból bírálható a korábbi gyakorlat szerinti csaknem valamennyi kiinduló mennyiség. Közülük is leginkább a normál nehézségi képlet gyakorlati úton (földfelszíni nehézségi mérésekből) meghatározott állandói támadhatók (γ_e , esetleg β és β_1 is, ha így határozták meg).

Meghatározásukkor ugyanis a földfelszínen mért tényleges nehézségi értékeket a tengerszintre (a geoidra számítják át, nem a Föld normálalakjára, a normálszferoidra vagy a szintellipszoidra, amire a normál nehézségi képlet vonatkozik. Ezen utóbbiak eltérése a geoidtól szélső esetben a mintegy ± 100 m-t is eléri, mely magasságkülönbség elhanyagolása több 10 mGalt is jelent a *g* értékében.

További bizonytalanság oka az, hogy a tengerszintre végzendő átszámításnak nincs egyöntetűen elfogadott, egységes módszere. De bármelyik módszer (modell) szerint végezzük is a redukálást, mindenképpen szükséges lenne a számítással figyelembe vett tömegek tényleges sűrűségének ismerete. Erre vonatkozóan is csak közelítésekre támaszkodhatunk.

Az elmondottak értelmében a földfelszíni nehézségi értékek alapján levezetett mennyiségeket – lehetőség szerint – kerülni kell a kiinduló adatok megválasztásakor, ha feltevésmentességre törekszünk.

Nem sokkal kedvezőbb a helyzet a geometriai módszerekkel meghatározott ellipszoidméretek egyértelműségével kapcsolatban sem.

A felsorolt negatívumok mellett figyelembe kell vennünk azt is, hogy a korszerű technikai lehetőségek (közöttük elsősorban a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelését, valamint a rájuk és a Föld természetes holdjára, a Holdra, végzett nagyszabatosságú lézeres távolságméréseket említve) lehetővé tették a Föld egyes fizikai jellemzőinek minden eddiginél pontosabb – viszonylag közvetlen – meghatározását. Így például elsőként kell említenünk a Föld tömegének és az általános tömegvonzási állandó szorzatának a kM szorzatnak, valamint a Föld J_2 másodfokú tömegfüggvényének (gömbfüggvény-együtthatójának, a sztatikai lapultságnak) nagyszabatosságú meghatározását.

A J_2-vel kapcsolatban megjegyezzük, hogy számértéke egyenesen arányos a Föld tehetetlenségi nyomatékainak

$$C - \frac{A+B}{2}, \text{ ill. } C-A$$

különbségével, így a földtest lapultságára jellemző kiinduló mennyiség lehet.

Nem említettük még a forgási szögsebesség kérdését. Nevezetesen azért, mert ez korábban is, de különösen a mai időmérési pontosság mellett, szinte a legnagyobb viszonylagos megbízhatósággal ismert mennyiség. Ennek bevonása az alapmennyiségek közé mindenesetre célszerű.

Végül, egyelőre elkerülhetetlen, hogy – jobb hiányában – a szintellipszoid a fél nagytengely-hosszát vegyük fel a kiinduló értékek közé. Ezzel a kényszermegoldással egyelőre tudatosan le kell mondani arról, hogy a szintellipszoidként meghatározandó vonatkoztatási felületet kizárólag egyértelműen meghatározható, feltevésmentes kiinduló mennyiségekből vezessük le, de ismereteink jelenlegi szintjén más lehetőség nem kínálkozik.

Ilyen körülmények figyelembevételével, végül is a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió 1967.-i Közgyűlése által ajánlott Geodéziai Vonatkoztatási Rendszer (GRS67) megalkotásakor a

$$kM = 3{,}986\ 03 \cdot 1014\ \mathrm{Nm^2/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{m^3 s^{-2}}),$$

$$\omega = 7{,}292\ 115\ 1467 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}},$$

$$J_2 = 1082{,}7 \cdot 10^{-6},$$

$$a = 6\ 378\ 160\ \mathrm{m}$$

kiinduló mennyiségekből vezették le a szintellipszoid potenciálelméleti összefüggéseivel a Föld normálalakjával azonos vonatkoztatási ellipszoidnak (*Reference Ellipsoid 1967) f geometriai lapultságát,* az akkor új normál nehézségi képlet (*Gravity Formula 1967)* γ_e, β, és β_1 együtthatóját és a normál nehézségi erőtér további jellemzőit.

A számított eredmények:

$$f = 1/298{,}247\ldots$$

$$\gamma_e = 9{,}780\ 318\ \mathrm{N/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{ms^{-2}})$$

$$\beta = 0{,}005\ 3024$$

$$\beta_1 = -0{,}000\ 0059$$

$$U_0 = 6{,}263\ 703 \cdot 10^7\ \mathrm{J/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{m^2 s^{-2}})$$

$$J_2^* \equiv J_{2\,Föld} \text{ (méréssel meghatározott kiinduló érték)}$$

$$J_4^* = -2{,}37 \cdot 10^{-6}$$

. . . .

A kiinduló mennyiségekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy *kM,* J_2 és *a* a mesterséges holdak pályamozgásának megfigyelése révén levezetett érték, amelyek közül az első kettő csaknem közvetlen meghatározás eredménye, míg *a* értékének további kis változása várható volt. Ezért az így kapott ellipszoidot még nem tekintjük a Föld *legjobb* ellipszoidi normálalakjának, csak a Földet *jól megközelítő* ellipszoidnak, amely azonban geodéziai *vonatkoztatási felületnek* teljesen megfelelt.

A hazai gyakorlatban az *Egységes Országos Térképrendszer* alappont-hálózatának vonatkoztatási ellipszoidjaként mi is bevezettük, és azóta is használjuk.

A XX. század későbbi évtizedeiben a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) közgyűlésein tovább finomította a geodéziai földmodellt. A kapott eredmények közül a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió 1980-ban fogadott el, és ajánlott *újabb nemzetközi Geodéziai Vonatkoztatási Rendszert* **GRS80** megjelöléssel.

Ebben ugyanazon kiinduló mennyiségekkel számoltak, mint a GRS67 megalkotásakor, de újabb számértékekkel. Lényeges változás az a fél nagytengely hosszban van, ez csökkent 23 m-rel, kM és J_2 alig változott, míg ω maradt változatlan.

A kiinduló adatok, tehát

$$kM = 3{,}986\ 005 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Nm^2/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{m^3 s^{-2}}),$$

$$\omega = 7{,}292\ 115 \cdot 10^{-11} \mathrm{s^{-1}},$$

$$J_2 = 1082{,}63 \cdot 10^{-6} \text{ és}$$

$$a = 6\ 378\ 137 \text{ m.}$$

A belőlük levezetett további jellemzők :

$$1/f = 298{,}257\ 222\ 101$$

$$\gamma_e = 9{,}780\ 326\ 7715\ \mathrm{N/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{ms^{-2}})$$

$$\beta = 0{,}005\ 302$$

$$U_0 = 6{,}263\ 686\ 850 \cdot 10^{-7} \mathrm{J/kg}\ (\text{vagy } \mathrm{m^2 s^{-2}})$$

$$J_2^* \equiv J_{2\,Föld} \text{ (méréssel meghatározott kiinduló érték)}$$

$$J_4^* = -2{,}370\ 912\ 22 \cdot 10^{-6}$$

. . . .

Megjegyezzük, hogy mivel mind a GRS67, mind pedig a GRS80 vonatkoztatási rendszer kiinduló adatát képező kM értéket mesterséges holdak észleléséből határozták meg, ez a Föld *légkörének tömegét is* tartalmazza. Következésképpen a kiszámított normál nehézségi értékek közel $1 \cdot 10^{-5}$ N/kg-mal (vagy 1 mgallal) nagyobbak a kelleténél. A $g-\gamma$ nehézségi rendellenességek számításakor ezt a mérési hely magasságának megfelelő javítással figyelembe kell venni.

A mesterséges holdas helymeghatározások (pl. a GPS) vonatkoztatási rendszere a **Geodéziai Világrendszer 1984** (*World Geodetic System*) = **WGS84,** amit ugyancsak a szintellipszoid elméletével alkottak meg. Ezt az Amerikai Egyesült Államok védelmi térképészeti szervezete (*Defence Mapping Agency = DMA)* fejlesztette ki,1960 óta több változatban. Az 1984-es megoldás kiinduló mennyiségeiből három megegyezik a GRS80 számértékével. A negyedik abban különbözik, hogy a mesterséges holdak észleléséből nem J_2 -t, hanem a potenciálfüggvény gömbfüggvénysora másodfokú együtthatójának $\overline{C}_{2,0}$ normalizált értékét vették fel, kettővel több értékes számjeggyel.

Így a kiinduló értékek:

kM = 3,986 005·10^{14} Nm^2/kg (vagy m^{3}s^{-2}),

ω = 7,292 115·10^{-11}s^{-1},

$\overline{C}_{2,0}$ = –484,166 85·10^{-6} és

a = 6 378 137 m.

A belőlük kiszámított további jellemzők is kis mértékben különböznek a GRS80 értékeitől:

$1/f$ = 298,257 223 563

γ_e = 9,780 326 7714 N/kg (vagy ms^{-2})

γ_p = 9,832 186 3685 N/kg (vagy ms^{-2})

U_0 = 6,263 686 084 97 10^{-7}J/kg (vagy m^{2}s^{-2})

$J_2^* = -\sqrt{5}\,\overline{C}_{2,0}$ = 1082,629 989 05 $J_{2\,Föld}$ (a méréssel meghatá-

rozott kiinduló $\overline{C}_{2,0}$ értéknek megfelelő $J_{2\,Föld}$ érték)

. . . .

Ebben a rendszerben a szintellipszoid felszínére a *normál nehézségi térerősséget* nem a sorbafejtett (351.3) alakban, hanem *Somigliana* (351.2) zárt képletének kissé átalakított, ugyancsak zárt

$$\gamma = \gamma_e \frac{\left(1 + k \sin^2 \varphi\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{1/2}}$$

alakjából számítják, ahol a k együttható itt nem a *Newton*-féle általános tömegvonzási állandó, hanem

$$k = \frac{b\,\gamma_p}{a\,\gamma_e} - 1$$

és

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

a szintellipszoid első numerikus excentricitásának négyzete.

Ezért a kiinduló mennyiségekből kiszámították még

k = 0,001 931 851 386 39 és e^2 = 0,006 694 379 990 13

értékét is.

*

Ezzel áttekintettük azokat a legjelentősebb geodéziai vonatkoztatási rendszereket, amelyek széles körben elterjedtek a nemzetközi gyakorlatban. Elvileg ezek mindegyike alkalmas a geodézia feladatainak a megoldásához, közöttük a különbség abban van, hogy a mérési módszerek és megbízhatóságuk fejlődésével az újabb vonatkoztatási rendszerek jellemzői (paraméterei) számszerűségükben a Föld megfelelő jellemzőjének egyre jobb közelítését adják.

353. A közepes földi ellipszoid

Mint az előzőekben láttuk, geodéziai földmodell, a szintellipszoid és külső nehézségi erőtere négy kiinduló mennyiségnek a Földre vonatkozó értékéből határozható meg. Ezek viszont gyakorlatilag csak mérésekből vezethetők le, így elkerülhetetlenül hibával terheltek. Mivel mérési módszereink és műszereink egyre tökéletesednek, a kiinduló mennyiségeknek is egyre pontosabb értékét ismerjük meg, amelyekből újabb és újabb vonatkoztatási rendszereket határoztak meg (GRS67, GRS80, stb.). Ezek mind annak az egyetlen − ideális (elképzelt) − vonatkoztatási rendszernek az egyre jobb megközelítői (realizációi), melynek kiinduló mennyiségei *pontosan (hibátlanul) megegyeznek a Föld megfelelő fizikai jellemzőjével.*

A Föld valódi (hibátlan, vagy pontos) kiinduló adataiból meghatározott szintellipszoidot nevezzük *közepes földi ellipszoidnak*. Ez a Föld *legjobb* ellipszoidi közelítője mind geometriai, mind fizikai értelemben.

Geometriai értelemben kielégíti a simulásnak mind a geoid-ellipszoid távolságok, mind pedig a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimum feltételét.

Fizikai értelemben kielégíti a nehézségi-rendellenességek négyzetösszegére vonatkozó minimum feltételt, és nehézségi erőtere a Föld külső nehézségi erőterét jól közelíti, ugyanis a normál potenciálfüggvény gömbfüggvénysorának n = 0-tól n = 2-ig terjedő tagjai a Földével megegyeznek.

Mindezek mellett a közepes Földi ellipszoid fogalmán keresztül szabatosan és egyértelműen értelmezhetővé válik a „*Föld egyenlítői félátmérője*” „*a Föld lapultsága*” és a „*földi egyenlítői nehézségi érték*” fogalma is.

Az eddigi gyakorlat által meghatározott vonatkoztatási rendszerek, ill. ezek alapfelületét képező vonatkoztatási ellipszoidok a közepes földi ellipszoid többé-kevésbé jó megközelítői.

9. Hét

4. A VONATKOZTATÁSI ELLIPSZOID ELHELYEZÉSE. ÁTSZÁMÍTÁS VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK KÖZÖTT

41. A feladat leírása

A földfelszínen kijelölt alaphálózati pontok, vagy a geoid megfelelő pontjainak térbeli helyzetét – a jelenlegi geodéziai gyakorlat döntő többségében – forgási ellipszoid alakú geodéziai alapfelületre vonatkozó ellipszoidi földrajzi koordinátákkal adjuk meg. Célszerűségi okból megkívánjuk, hogy ez az alapfelület, a *vonatkoztatási ellipszoid* a a Föld méretét és alakját jól megközelítse. Az eddigiekben megismertük azokat a módszereket, amelyekkel az ezt a kívánalmat kielégítő ellipszoidi jellemzők a mérési eredményeink alapján kiszámíthatók.

A koordináta-számításhoz azonban még az is szükséges, hogy ezt, a most már ismert méretű és alakú (elképzelt) ellipszoidot a Föld fizikai felszínén kijelölt alaphálózati pontokhoz, vagy a geoidhoz (más szóval a természethez) és a már elképzelt földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerünk valamelyik (jelenleg az ITRS) megvalósulásához képest a *térben elhelyezzük.* Az ily módon ismert méretű, alakú és elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoid valósítja meg helymeghatározó koordináta-számításaink felületi koordináta-rendszerét.

Ha földfelszíni geodéziai alappont-hálózatunkat **mesterséges holdas** (szatellitageodéziai) módszerekkel (pl. GPS) határozzuk meg, akkor a WGS84 rendszer már magába foglalja a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezését is. A szintellipszoid potenciálelméleti összefüggéseiben, ugyanis, benne van az a feltétel, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontját, és vele együtt az ellipszoid geometriai középpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük. Az ellipszoid kistengelyét, pedig a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer Z tengelyére, ellipszoidi kezdő meridiánsíkját ennek X tengelyére illesztjük. Így, a GPS-hálózatok esetében a vonatkoztatási ellipszoid illeszkedik a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulásának) tengelyeire, és ezzel együtt a Föld tömegközéppontjára. A vonatkoztatási ellipszoid ilyen elhelyezését geocentrikus elhelyezésnek mondjuk.

Hagyományos geometriai módszerekkel (szög- és távolságmérésekkel) meghatározott **geodéziai alaphálózatok** esetében a koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidjának méretét, alakját és térbeli elhelyezését jellemző mérőszámokat a *geodéziai dátumban* foglaljuk össze.

Az *elhelyezési adatokat* a gyakorlatban háromféle módon lehet megadni. Egyik lehetséges megadási mód, ha rögzítjük a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontjának a Föld tömegközéppontjához viszonyított X_0, Y_0, Z_0 (geocentrikus) térbeli derékszögű koordinátáit.

A másik két megadási mód esetében kiválasztjuk a számítandó geodéziai alaphálózat valamely (általában központi fekvésű) csillagászati-geodéziai (*Laplace*-) pontját P1 *csillagászati kiindulópontként*, és megadjuk a

(φ_1, λ_1, h_1) ellipszoidi földrajzi koordinátáit, vagy

(ξ_1, η_1, N_1) függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát a szóban lévő geodéziai alapfelületre vonatkozóan. Ezek a mennyiségek kijelölik az ellipszoidnak a csillagászati kiindulóponton (pontosabban ennek geoidi megfelelőjén) áthaladó felületi normálisát és ezen az ellipszoid felületnek a geoidtól mért távolságát. Ezen adatok mellett még hallgatólagosan mindig feltételezzük a vonatkoztatási ellipszoid kistengelyének a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS, megvalósulásának) Z tengelyével, és az ellipszoidi kezdő meridiánsíknak a földi koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS, megvalósulásának) X tengelyével párhuzamos helyzetét. Ezt azimútméréssel a korábban már megismert, az azimútokra vonatkozó (322.5) *Laplace*-egyenleten keresztül biztosítjuk. Ez utóbbi műveletet az ellipszoid *tájékozásának* nevezzük.

A csillagászati kiindulópontban a geodéziai dátum megadásával lehetségessé válik összefüggő geodéziai alaphálózat további pontjainak koordináta-számítása az I. geodéziai főfeladat sorozatos alkalmazásával (ld. *Geodéziai alaphálózatok* tantárgy).

A koordináta-számítás szempontjából a vonatkoztatási ellipszoidot a Földhöz viszonyítva elvileg teljesen tetszőlegesen helyezhetjük el. A gyakorlati célszerűség azonban mégis azt kívánja, hogy az ellipszoidot olyan helyzetbe hozzuk, hogy a természetben kijelölt geodéziai alaphálózatunk az ellipszoidnak is arra a felületdarabjára (arra a részére) essék, ahol a földfelszínen is, a valóságban van. Ez ugyanis azzal az előnnyel jár, hogy egyrészt alappontjaink ellipszoidi koordinátái a mért szintfelületi koordinátáktól csak kis mértékben fognak különbözni, így a pontok valódi földfelszíni helyzetét is jó közelítéssel jellemzik, másrészt az egész hálózatunk az ellipszoidnak arra a részére kerül, amelynek görbületi viszonyai a hálózat területén a geoid alakjának megfelelnek. Így, a természetnek az ellipszoid felületére leképezésével járó elkerülhetetlen vetítési torzulások a lehetőségig csökkenthetők.

Megjegyezzük, hogy a választott méretű és alakú vonatkoztatási ellipszoidunk (helymeghatározásainkhoz viszonyítási alapul szolgáló) egyrészt ellipszoidi felületi, másrészt (geometriai középpontja, kistengelye és ellipszoidi kezdő meridiánsíkja által) térbeli derékszögű koordináta-rendszert valósít meg. Ezt a koordináta-rendszert az elhelyezési és a tájékozási adatokkal földi ponthoz (valamely geodéziai alaphálózati ponthoz, vagy a Föld tömegközéppontjához) kötjük. Ebben az értelemben *minden geodéziai dátum egy-egy (helyi, vagy geocentrikus) vonatkoztatási rendszer* [161.] *megvalósulásaként is felfogható.*

A geodézia fejlődéstörténete során a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének háromféle gyakorlati megoldása alakult ki, amelyeket a következőkben fogunk megismerni.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton az elhelyezési adatok geometriai tartalmát!

- A geodéziai dátum megadásának háromféle módja miért egyenértékű egymással?

42. A vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének gyakorlati megoldásai

421. Az önkényes elhelyezés

Az eddigiekből már látható, hogy a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének gyakorlati megoldásához a geodéziai alaphálózat legalább egy pontjában, a P_1 csillagászati kiindulópontban kozmikus geodéziai módszerekkel (csillagészleléssel) meg kell mérni a pont Φ_1, Λ_1 szintfelületi földrajzi koordinátáit, szintezéssel, esetleg trigonometriai magasságméréssel meg kell határozni a H_1 tengerszint feletti magasságát és a tájékozás céljára ugyancsak kozmikus geodéziai módszerrel mérni kell a pontból kiinduló legalább egy hálózati oldal A_1 szintfelületi azimútját.

A csillagászati-geodéziai mérések eredményeit a pont magasságának ismeretében (a függővonal görbültsége miatt a már megismert (3322.2.) összefüggéssel) általában a tengerszintre kell átszámítani. Így végeredményben a mért és átszámított szintfelületi földrajzi koordináták megadják a csillagászati kiindulópont geoidi megfelelőjében a szintfelületi normális (a geoidi helyi függőleges) térbeni helyzetét.

Ha ezeket a méréseket valóban csak egyetlen pontban, a csillagászati kiindulópontban végeztük el, akkor a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének legegyszerűbb esete, az *önkényes elhelyezés* abból áll, hogy a már említett gyakorlati szempontok [41.] figyelembe vételével a csillagászati kiindulópont ellipszoidi koordinátáit a *mért szintfelületi értékek közelében tetszés szerint felvesszük.*

Ennek kézen fekvő megoldása az, hogy az ellipszoidi helymeghatározó adatok értékrendszerét a pont geoidi megfelelőjének szintfelületi földrajzi koordinátáival és tengerszint (geoid) feletti magasságával azonos értékben állapítjuk meg, azaz

$$\varphi_1 \equiv \Phi_1$$

$$\lambda_1 \equiv \Lambda_1$$

$$h_1 \equiv H_1.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy ebben a pontban a függővonal-elhajlás összetevők és a geoid-ellipszoid távolság értékrendszerét nulla értékben vesszük fel, vagyis

$$\xi = 0$$

$$\eta = 0$$

$$N_1 = 0.$$

Ezzel a megoldással azt érjük el, hogy vonatkoztatási ellipszoidunk kiválasztott felületi normálisát a csillagászati kiindulópontban (pontosabban ennek geoidi megfelelőjében) a pont *geoidi helyi függőlegesével egybeejtjük*, és az ellipszoid felszínét abban a pontban a geoidhoz *érintő helyzetbe* hozzuk.

Az ezzel a felvétellel a csillagászati kiindulópont geoidi megfelelőjében érintő helyzetbe hozott ellipszoidunk az e ponton átmenő kiválasztott felületi normálisa körül még tetszés szerint forgatható a térben. Az ellipszoidnak a korábban leírt *tájékozására,* azaz a tengelyek párhuzamosságának biztosítására használjuk fel az *azimútmérés* eredményét.

A csillagászati kiindulópontból kiágazó kiválasztott alaphálózati oldal mért (és a geoidra átszámított) szintfelületi (geoidi) azimútját a (322.5) *Laplace*-egyenletbe beírjuk. Esetünkben nulla értékű függővonal-elhajlás összetevőkkel számolva, megkapjuk ebből a szóban lévő hálózati oldalnak megfelelő normálmetszet *ellipszoidi azimútját* olyan helyzetű ellipszoidra vonatkozóan, amelynek kistengelye a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg ITRS megvalósulásának) Z tengelyével, ellipszoidi kezdő meridiánsíkja ennek X tengelyével, (a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben) párhuzamos. Ez az ellipszoidi azimút ebben a különleges esetben éppen a geoidi azimúttal egyenlő.

(Megjegyezzük, hogy a további koordináta-számításhoz ezt a kiinduló ellipszoidi azimútértéket, a *Geodéziai alaphálózatok* tárgyban megismert módon, a geodéziai vonalra még át kell számítani!)

Az így elhelyezett és tájékozott vonatkoztatási ellipszoidunk geometriai középpontja, kistengelye és ellipszoidi kezdő meridiánsíkja − a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg ITRS megvalósulásához viszonyítva eltolt helyzetű) − (x,y,z) *helyi* térbeli derékszögű koordináta-rendszert is meghatároz.

Ezzel az eljárással tehát minden egyes önálló geodéziai alaphálózathoz (a csillagászati kiindulópontjukban) egy-egy önálló koordináta-rendszert létesítünk, amelyek egymással csak annyi kapcsolatban vannak, hogy koordináta-tengelyeik (a mérési megbízhatóságon belül) egymással párhuzamosak. A tengelyek egymáshoz viszonyított eltolásának mértéke viszont ismeretlen, és az eddigi adatokból nem is határozható meg.

Az ily módon végzett önkényes elhelyezés előnyei:

- egyszerűsége,
- csak egyetlen pontban igényel csillagászati-geodéziai (földrajzi helymeghatározás) méréseket és
- a csillagászati kiindulópont környezetében a földfelszínnek az ellipszoidra vetítésével járó torzulásokat a lehető legkisebbre csökkenti.

Ezekkel szemben hátránya nagyobb kiterjedésű hálózatok esetében mutatkozik, amikor a hálózatban a csillagászati kiindulóponttól távolodva a torzulások a szélek felé egyre növekednek. Így a torzulási viszonyok a hálózat területén igen különbözőek lehetnek. Ezen a hátrányon segít a vonatkoztatási ellipszoid *relatív* elhelyezése.

Feladatok:

- Szemléltessük vázlaton a $\xi_l = \eta_1 = N_1 = 0$ önkényes elhelyezés geometriai tartalmát!
- Mutassuk be ugyanezen a vázlaton a hálózat tetszőleges P_i $(i \neq 1)$ pontjainak függővonal-elhajlását és a geoid-ellipszoid távolságát! Hogyan oszlanak ezek el a hálózat területén?
- Önkényes elhelyezés esetén általában milyen helyzetbe kerül az ellipszoid geometriai középpontja a Föld tömegközéppontjához viszonyítva?
- Mi biztosítja a megfelelő koordináta-tengelyeknek a megkívánt párhuzamosságát, miért, és milyen megbízhatósággal?
- Miért határozzuk meg a csillagászati kiindulópont szintfelületi földrajzi koordinátáit?

422. A simuló (relatív) elhelyezés

A vonatkoztatási ellipszoid simuló elhelyezéséhez az szükséges, hogy a geodéziai alaphálózat *több pontjában* is végezzünk csillagászati-geodéziai (földrajzi helymeghatározás) méréseket és – bizonyos esetben – magasságmeghatározást. Ez esetben ugyanis lehetségessé válik az elhelyezési adatok kiszámítása oly módon, hogy a választott vonatkoztatási ellipszoidot *a hálózat egész területén simuló helyzetbe hozzuk a geoidhoz.* Így a természetben kijelölt hálózatnak az ellipszoidra vetítésével járó elkerülhetetlen torzulások legalább a lehető legkedvezőbb eloszlásban fogják terhelni a hálózatunkat.

A simuló elhelyezésnek kétféle megoldása alakult ki a gyakorlatban attól függően, hogy a simuló helyzet előállításakor az ellipszoidnak csak a saját felszíne irányában végzendő (ún. vízszintes), *kétdimenziós*, vagy vízszintes és függőleges, azaz *háromdimenziós* mozgatását tesszük lehetővé. Megjegyezzük, hogy a csillagászati kiindulóponton kívüli csillagászati geodéziai pontok magasságára csak ez utóbbi esetben van szükség.

Az előbb említett kétdimenziós (felületi) megoldás *Helmert* nevéhez fűződik és gyakran „*transzlatív függővonal-elhajlás kiegyenlítésnek*" nevezik. A háromdimenziós (térbeli) megoldást *Vening Meinesz* dolgozta ki és *projektív függővonal-elhajlás kiegyenlítés* néven ismert a geodéziai gyakorlatban. Megjegyezzük, hogy valójában egyik eljárás sem kiegyenlítés a szó valódi értelmében, hanem a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása az elhelyezési adatoknak „fölös számú" egyenletből a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimumfeltétele melletti kiszámítására.

Mindkét számítási eljárásnak általánosabb alakjával már megismerkedtünk a felületek módszerének tárgyalásakor [323.]. A különbség (és egyben az egyszerűsítés) ehhez viszonyítva abban áll, hogy akkor a legjobb simulás érdekében az ellipszoidi. adatok (fél nagytengely és a lapultság) változását is megengedtük a számítás során, sőt éppen ezen ismeretlen változások meghatározása volt az elsődleges célunk. Ezzel egyidejűleg megkaptuk még a simuló méretű és alakú ellipszoid legkedvezőbb elhelyezését és tájékozását biztosító ismeretlen mennyiségek (a csillagászati kiinduló pont ellipszoidi koordinátáinak és a kiinduló oldal ellipszoidi azimútjának) számértékét is. Jelen esetben viszont *már adott* (többnyire nemzetközileg ajánlott) *méretű és alakú ellipszoid* simuló elhelyezését keressük, így az ismeretlenek vektorából elmarad az ellipszoidi adatok változása, és maradnak csak az *elhelyezés és tájékozás adatai.* Így az ismeretlenek száma háromra, illetve a projektív módszer esetében négyre csökken. Egyébként a számítás módszere elvben megegyezik a már megismert eljárásával.

A gyakorlatban azonban ennek kissé módosított két változata terjedt el. A módosítás mindkettőben abban áll, hogy a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimumfeltételéhez még hozzáveszik az azimútra vonatkozó *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegének minimumát is, ezzel mindjárt a legkedvezőbb tájékozást is biztosítva. (A *Laplace*-ellentmondás valamely *Laplace*-pontból kiinduló hálózati oldalra az azimútmérés alapján, a (322.5) *Laplace*-egyenletből kiszámított ellipszoidi azimút és ugyanerre az oldalra a kezdő hálózati oldal azimútjából a mért hálózati szögekkel levezetett ellipszoidi azimút különbsége.)

<u>*Wolf szabatos*</u> (a Iegkisebb négyzetek módszere szerinti) <u>*megoldása*</u> csak abban különbőzik az eredetileg megismert *Helmert*-féle eljárástól, hogy a függővonal-elhajlások négyzetösszege mellett a *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegét is bevonja a minimumfeltételbe, de különben a számítást a már megismert szabatos eljárás szerint végzi. A kibővített minimumfeltétel miatt a javítási egyenletekben és tisztatag vektorokban is adódik különbség, ugyanis a *Laplace*-egyenletre tekintettel, itt negyedik féle javítási egyenlettípust is fel kell

állítani, ha a pontban azimút és hosszúságmérést is végeztek. A tisztatag vektor is bővül a *Laplace*-ellentmondások előzetes értékével.

Ledersteger közelítő módszerében külön elégíti ki a függővonal-elhajlásokra vonatkozó minimumfeltételt és ezzel számítja a dφ_1 és a dα_1 ismeretlent, majd külön számítási lépésben elégíti ki a *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegének minimumfeltételét, és számítja a dλ1 ismeretlent. A módszer közelítő volta ellenére a gyakorlat számára elegendően jó eredményre vezet, és előnye a számítás egyszerűségében és gyorsaságában van.

Végeredményként tehát a csillagászati kiindulópontnak a felvett méretű, alakú és *a hálózat területén a geoidhoz simuló helyzetbe hozott* ellipszoidra vonatkozó ellipszoidi szélességét, hosszúságát, illetve függővonal-elhajlás összetevőit, valamint a kiinduló oldal ellipszoidi azimútját (és esetleg geoid-ellipszoid távolságát, *Vening Meinesz* eljárása esetében) kapjuk. Ezek ismeretében a javítási egyenletekből számíthatók még a hálózat többi csillagászati-geodéziai pontjainak a simuló ellipszoidra vonatkozó függővonal-elhajlás összetevői, a további mért oldalak ellipszoidi azimútja (és esetleg ezen pontok geoid-ellipszoid távolsága) is. Ezen adatokból könnyen képezhetők a csillagászati-geodéziai pontok ellipszoidi koordinátái a mért szintfelületi földrajzi koordináták alapján.

Ily módon a simuló (relatív) elhelyezéssel minden önálló geodéziai alaphálózathoz egy-egy *helyi simuló elhelyezésű* (tehát egymástól független) koordináta-rendszert hozunk létre, amelyek egymással csak annyi kapcsolatban vannak, hogy a koordináta-tengelyeik egymással (a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben) párhuzamosak, de egymástól ismeretlen távolságban helyezkednek el. A gyakorlat azt mutatja, hogy ezek a távolságok néhányszor 100 m nagyságrendűek, vagy ennél kisebbek, míg a tengelyek párhuzamossága a jelenlegi méréstechnika mellett mintegy 1″-en belül biztosítható.

A megoldásnak minden esetre előnye, hogy a természetnek a simuló elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidra vetítésekor keletkező (elkerülhetetlen) torzulások mértéke és eloszlása a hálózat területén a lehető legkedvezőbb, mert az ellipszoid a geoidhoz igen közeli helyzetben van. A XX. század második feléig (végéig) az egyes országok nagyméretarányú felmérésének alapját képező nemzeti geodéziai alaphálózatok számításához ez volt a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének szinte kizárólagosan használt módszere.

Tudomásul kell venni azonban, hogy a különböző simuló (relatív) elhelyezésű helyi rendszerekben megadott koordináták *közös számítási eljárásba* (pl. azimút- és távolságszámítás a II. geodéziai főfeladat segítségével) *nem vonhatók be*. Ez az országok közötti nemzetközi műszaki, közlekedési (légi, tengeri, felszíni járművek, űreszközök, stb. irányítása), gazdasági, stb. kapcsolatok, együttműködések egyre erőteljesebbé válásával kezdett gondokat okozni. Így gyakorlati igényként jelentkezett az egyes helyi ellipszoidi rendszerek közötti kapcsolat létesítése, illetve *egységes, közös elhelyezésű* vonatkoztatási ellipszoid bevezetése. Ezt a célt szolgálja a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének harmadik lehetősége, amelynek alkalmazása esetén az itt említett nehézségek nem merülnek fel.

Feladatok:

- Szemléltessük vázlaton a simuló (relatív) elhelyezés alapelvét!
- Mutassuk be vázlaton az egymástól független geodéziai alaphálózatokhoz számított simuló elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidoknak a Föld tömegközéppontjához és forgástengelyéhez viszonyított helyzetét.
- Mi a simuló elhelyezés előnye és hátránya?
- Miben egyezik és miben különbözik a vonatkoztatási ellipszoid simuló elhelyezése a felületek módszerétől?
- Miből származik a *Laplace*-ellentmondás?

- Miért nem lehet az egész geoidhoz egyetlen simuló ellipszoidot illeszteni ezzel a módszerrel?
- Mi a feltétele annak, hogy simuló (relatív) elhelyezést számíthassunk?

10. Hét

423. A geocentrikus elhelyezés

A mai felhasználói igények a korábbi, egymástól független helyi (nemzeti) hálózatok helyett a földfelszín nagy részeire, a földrészekre, sőt az egész Földre kiterjedő (kontinentális, interkontinentális, globális) geodéziai alapponthálózat(ok), geodéziai világhálózat(ok) kialakítását követelik meg. Ez akkor oldható meg, ha a Föld bármely részén kialakított geodéziai hálózat pontjainak koordinátáit egy és ugyanazon (méretű, alakú és elhelyezésű) közös vonatkoztatási ellipszoidon számítjuk.

A jelenlegi gyakorlatban geodéziai vonatkoztatási rendszert csak fizikai módszerrel alkotunk [34.]. Láttuk, hogy ennek eredményeként olyan vonatkoztatási ellipszoid méretét és alakját kapjuk, amely a geoid egészéhez úgy simul, hogy geometriai középpontja a Föld tömegközéppontjával, kistengelye a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulásának) Z, ellipszoidi kezdő meridiánsíkja annak X tengelyével párhuzamos. A vonatkoztatási ellipszoidnak ezt az elhelyezését neveztük geocentrikusnak.

Ha geodéziai alaphálózatunkat ilyen (geocentrikus) elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidon akarjuk számítani, akkor az ellipszoid elhelyezése kötött, és a geodéziai dátum elhelyezési adatai most a hálózatunknak az elhelyezését adják meg az ellipszoidon. De ez utóbbit sem választhatjuk meg szabadon, hiszen a fizikai földfelszín és rajta a geodéziai alaphálózatunk a Föld tömegközéppontjához viszonyítva valamilyen adott természetbeni helyzetben van, amit mérésekkel kell meghatároznunk.

Méréseink eredményeiből geodéziai alaphálózatunk P1 kiindulópontjának a geocentrikus elhelyezésű alapfelületre vonatkozó $(\varphi_1, \lambda_1, h_1)_{\mathrm{geoc}}$ koordináta-hármasát kell kiszámítani. Ha ezeket tekintjük hálózatunk elhelyezési adatainak, azaz

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix}_{geoc} \qquad (423.1)$$

és belőlük számítjuk az I. geodéziai főfeladattal a többi hálózati pont koordinátáit, akkor ez utóbbiak is valamennyien geocentrikus ellipszoidi földrajzi koordináták lesznek. Így, a Föld bármely részén, akár egymástól teljesen függetlenül kialakított, (geometriai módszerekkel mért) geodéziai alaphálózatok valamennyi pontjának helyzetét, koordinátáit azonos koordináta-rendszerben ismerjük. Egymástól bármilyen messze fekvő hálózati pontok között számíthatunk távolságot és azimútot a pontok koordinátáiból (a II. geodéziai főfeladat algoritmusával).

Ezzel szemben, valamelyes hátrányként jelentkezik az, hogy, mivel a geocentrikus elhelyezésű ellipszoid a Föld egész geoidjához simul, egyes helyeken mintegy ±130 m-rel eltérhet tőle. Ez pedig a földfelszínnek az ellipszoidra vetítésével járó torzulások szempontjából nem kedvező (pl. nagyméretarányú térképezés). A mai geodéziai gyakorlat , az előnyök mellett, ezt a hátrányt nem tekinti jelentősnek.

A koordináta-számításhoz természetesen itt is szükség van a hálózati kiinduló oldal ellipszoidi azimútjára, azaz a hálózat tájékozására. Ez meghatározható csillagászati-geodéziai módszerrel, azimútméréssel, vagy esetleg a kiinduló oldal másik végpontja geocentrikus ellipszoidi földrajzi koordinátáinak meghatározásával.

A geocentrikus ellipszoidi koordináták meghatározásának legelterjedtebb és jelenleg legmegbízhatóbb módja a mesterséges holdak geodéziai észlelésén (pl. GPS-méréseken) alapszik. Tudjuk, hogy belőlük mindig geocentrikus koordinátákat kapunk (közvetlenül nem is tudunk mást), mert a mesterséges holdak pályája a Föld tömegközéppontja körül alakul ki (Kepler 1. törvénye), és ezért a pályapontok koordinátáit is geocentrikus elhelyezésű koordináta-rendszerben számítják és adják meg (pl. a WGS84 koordináta-rendszere).

A geocentrikus ellipszoidi koordináták meghatározásának másik lehetséges útja, ha a P_1 kiinduló pontban földrajzi helymeghatározás mérésekkel meghatározzuk a pont (Φ_1, Λ_1) szintfelületi földrajzi koordinátáit és szintezéssel H_1 geoid (tengerszint) feletti magasságát, valamint Δg nehézségi rendellenességekből a pont geocentrikus (korábbi megjelöléssel: abszolút) függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát. Velük a geocentrikus elhelyezés adatai

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix}_{geoc} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Lambda_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 / \cos\varphi_1 \\ N_1 \end{bmatrix}_{geoc}, \tag{423.2}$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ N_1 \end{bmatrix}_{geoc} = \begin{bmatrix} \xi(\Delta g) \\ \eta(\Delta g) \\ N(\Delta g) \end{bmatrix}. \tag{423.3}$$

A függővonal-elhajlás összetevők és a geoid-ellipszoid távolság kapcsolatát a nehézségi rendellenességekkel a Fizikai geodézia tantárgy tárgyalja. Ezek az összefüggések és a normál nehézségi erőtér szerkezetét meghatározó, már megismert képletek [343.] tartalmazzák azt a feltételt, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjával egybeesik.

Az elérhető megbízhatóság vonatkozásában megjegyezzük, hogy a mesterséges holdakra végzett mérésekből levezetett geocentrikus koordináták középhibája, egyedi pontmeghatározás esetén, közel áll a csillagászati geodéziai mérésekéhez (±1÷5 m). Ha valamely pont helyzetét valamely világhálózat (ITRF), vagy helyzetünkben az egységes európai hálózat keretpontjaira (EUREF) támaszkodó mérésekkel vezetjük le, a megbízhatóság két nagyságrenddel is jobb lehet. A gravimetriai meghatározásból származó elhelyezési adatok középhibája inkább 10 m nagyságrendű és erősen függ a pont környezetének gravimetriai felmértségétől, így ez a megoldás a mesterséges holdak megjelenése óta már inkább csak elvi jelentőségűvé vált.

A mai geodéziai gyakorlatban egyre inkább elterjed a geodéziai alaphálózatok mesterséges holdas meghatározása (GPS-hálózatok, magyarországi OGPSH). Ezekben természetesen közvetlenül geocentrikus elhelyezésű ellipszoidi koordinátákat számíthatunk. Ugyanakkor számos országban, mint Magyarországon is, közhasználatban vannak a korábban, geometriai módszerekkel mért (hagyományosan kialakított) geodéziai alaphálózatok (is). A felsőgeodézia egyik fontos és időszerű feladata ezeknek, a már korábban helyi simuló ellipszoidon kiszámolt hálózatoknak valamely világhálózatba beillesztése. Ilyen esetekben a meglévő helyi hálózat több pontján végzett mesterséges hold észleléssel geocentrikus (pl. WGS) koordinátákat is meghatározunk, és az így nyert − mindkét rendszerben ismert koordinátájú pontok alapján − a többi pontok helyi rendszerű koordinátáit a geocentrikus rendszerbe átszámítjuk. Ennek módszereivel a következőkben fogunk megismerkedni.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton a geocentrikus, (vagy korábbi elnevezéssel: abszolút) elhelyezés geometriai tartalmát!
- A mesterséges holdakra végzett mérések miért geocentrikus koordinátákat eredményeznek?
- Mi az előnye és a hátránya a geocentrikus elhelyezésnek?
- Mi a feltétele annak, hogy az alapfelületet geocentrikus elhelyezésbe hozzuk?

43. Átszámítás különböző vonatkoztatási rendszerek között

Bár, mint láttuk, az elvi és gyakorlati lehetőség fennáll közös geocentrikus koordináta-rendszerben egységes geodéziai világhálózat kialakítására, a jelenlegi geodéziai gyakorlat, egyelőre még széles körben, használ helyi (önkényes vagy relatív) elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidokat. Mindaddig, amíg ez az állapot fennáll, fel kell készülni arra, hogy egyes helyi rendszerekben megadott (φ, λ, h) ellipszoidi földrajzi koordinátákat, vagy (ξ, η, N) függővonal-elhajlás összetevőket és/vagy geoid-ellipszoid távolságokat másik vonatkoztatási rendszerbe is át tudjunk számítani.

Hasonló igény merül fel a geodéziai gyakorlatban akkor is, amikor ugyanazon geodéziai alaphálózat pontjainak koordináta-számításához bevezetett geodéziai dátumot később, valamilyen okból, újabbra kívánjuk felcserélni. Ilyenkor elképzelhető, hogy a korábbi vonatkoztatási ellipszoid számára az újabb csillagászati-geodéziai mérések eredményeinek figyelembevételével korszerűbb elhelyezési adatokat számítva megváltoztatjuk ennek elhelyezését. De az is lehetséges, hogy egyidejűen más méretű és alakú alapfelületet (pl. újabb nemzetközi ellipszoidot) is be kívánunk vezetni. Az a változat is gyakori a geodéziai gyakorlatban, hogy valamely kiszámított geodéziai hálózat korábban felvett vonatkoztatási ellipszoidját kívánjuk korszerűbbel felcserélni. A mai gyakorlatban egyre többször válik szükségessé valamely helyi elhelyezésű rendszerből geocentrikusba, vagy fordítva, átszámítani.

Mindezen feladatokat gyűjtőnéven dátummódosításnak nevezzük.

431. A dátummódosítás hatásainak kiszámítása

A dátummódosítás valójában koordináta-transzformációt jelent a pontjaink térbeli derékszögű koordinátái között. Ezért a dátummódosítás hatásainak kiszámításához a kiinduló összefüggéseket térbeli derékszögű és az ellipszoidi földrajzi koordináták közötti – a koordináta-rendszerek tárgyalásakor már megismert – összefüggések képezik.

A továbbiakban egyelőre feltételezzük, hogy a vonatkoztatási rendszereink koordináta-tengelyei egymással párhuzamosak, és így az átszámításokban csak párhuzamos eltolásokat veszünk figyelembe.

Vezessük be a következő jelöléseket a térbeli derékszögű és az ellipszoidi földrajzi koordináták közötti transzformáció leírására:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r}(\varphi, \lambda, h; a, f) = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left[N(1-e^2)+h\right]\sin\varphi \end{bmatrix}, \tag{431.1}$$

ahol

$$N = a(1–e^2\sin2\varphi)\text{-}1/2 \tag{431.2}$$

itt az ellipszoid harántgörbületi sugara és $e^2 = 2f - f^2$ az első numerikus excentricitás négyzete.

Szükségünk van még a (431.1) inverz függvényére is, amit a következőképpen fogunk jelölni:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{r}^{-1}(x, y, z; a, f) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}\dfrac{z + e'^2 b \sin^3\theta}{p - e^2 a \cos^3\theta} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{p}{\cos\varphi} - N \end{bmatrix}, \tag{431.3}$$

ahol

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{za}{pb} \tag{431.4}$$

segédszög, $p = (x^2 + y^2)1/2$ a pontnak a z tengelytől mért távolsága és $e'^2 = e^2/(1 - e^2)$ a második numerikus excentricitás négyzete.

A dátummódosítás hatásainak kiszámítását három részben tárgyaljuk.

431.1 A koordináta-rendszer kezdőpontjának eltolódása

Valamely geodéziai alappont-hálózat tetszőleges P pontjának (φ, λ, h) koordinátáit ismerjük a különböző dátumadatokkal jellemzett 1 és 2 jelű rendszerben. Legyen a feladatunk a különböző méretű, alakú és elhelyezésű két vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontja egymáshoz viszonyított helyzetének (eltolódásának) meghatározása.

A megoldást az előzőekben [431.] ismertetett koordinátaátszámítás segítségével egyszerűen megkaphatjuk azáltal, hogy a (431.1) összefüggés értelemszerű alkalmazásával kiszámítjuk mindkét rendszerben a pontunk térbeli derékszögű koordinátáival a pont ${}_1\mathbf{r}(X, Y, Z)$ és ${}_2\mathbf{r}(x, y, z)$ helyvektorát.

$${}_1\mathbf{r} = {}_1\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{r}({}_1\varphi, {}_1\lambda, {}_1h; {}_1a, {}_1f) \tag{4311.1}$$

és

$${}_2\mathbf{r} = {}_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r}({}_2\varphi, {}_2\lambda, {}_2h; {}_2a, {}_2f). \tag{4311.2}$$

Ezek után a 2 jelű rendszer kezdőpontjának (origójának) az 1 rendszeréhez viszonyított $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ eltolásvektora a P pont kétféle helyvektorának

$$\mathbf{r}_0 = {}_2\mathbf{r} - {}_1\mathbf{r} \qquad (4311.3)$$

különbségeként számítható.

Ezt a megoldást alkalmazhatjuk minden olyan pontra, amelyiknek mindkét rendszerbeli koordinátáit ismerjük. Ez lehet a hálózatunk csillagászati kiindulópontja, vagy bármely másik ilyen pontja.

A gyakorlatban ez a feladat vagy különböző geodéziai dátummal jellemzett helyi rendszerek egymáshoz viszonyított, vagy valamely helyi rendszer geocentrikus elhelyezésének vizsgálata során merül fel.

431.2 Az ellipszoidi földrajzi koordináták átszámítása

Oldjuk meg a fordított feladatot, és számítsuk ki az 1 jelű rendszer ${}_1\mathrm{E}(a, f)$ ellipszoidjára vonatkozó ${}_1(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátákkal jellemzett tetszőleges P földfelszíni pontnak a 2 jelű rendszerbeli ${}_2(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátáit, ha a geodéziai dátum megváltozását az ellipszoidi jellemzők ${}_2\mathrm{E}(a, f)$ új értékével, valamint az ellipszoid geometriai középpontjának $\mathbf{r}_0$ eltolásvektorával adott új helyzetével jellemezzük.

Ez esetben először a (431.1) összefüggés segítségével meghatározzuk a P pont térbeli derékszögű koordinátáit az 1 jelű rendszerben

$${}_1\mathbf{r} = \mathbf{r}({}_1\varphi, {}_1\lambda, {}_1h; {}_1a, {}_1f), \qquad (4312.1)$$

majd figyelembe vesszük azt, hogy a pont 2 jelű rendszerbeni helyzetét az

$${}_2\mathrm{r} = {}_1\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \qquad (4312.2)$$

összefüggéssel meghatározva, a (431.3) inverz transzformációval a kívánt eredményhez jutunk:

$$.\ {}_2\begin{bmatrix}\varphi\\ \lambda\\ h\end{bmatrix} = \mathbf{r}^{-1}\left({}_2x,\ {}_2y\ {}_2z;\ {}_2a,\ {}_2f\right) \qquad (4312.3)$$

Következő feladatként számítsuk ki, hogy mennyit változnak valamely geodéziai alaphálózat tetszőleges P pontjának az 1 jelű rendszerben ismert ${}_1(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátái akkor, ha a dátum megváltozása a P_1 pont 2 jelű rendszerbeli ellipszoidi földrajzi koordinátáinak ismeretében adott.

Ezt a feladatot is egyszerűen megoldhatjuk két lépésben úgy, hogy a [431.1]-ben ismertetett módon először meghatározzuk a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontjának a 2 jelű rendszerbeni helyzetét (azaz az r_0 eltolásvektort), majd pedig követjük az előző bekezdésekben vázolt számítási eljárást a P pont 2 jelű rendszerbeni ${}_2(\varphi, \lambda, h)$ koordinátáinak számítására.

431.3 A függővonal-elhajlások és a geoidundulációk átszámítása

Számítsuk ki a P tetszőleges hálózati pont (ξ, η) függővonal-elhajlás összetevőinek és N geoid-ellipszoid távolságának megváltozását, ha a geodéziai dátumot a P_1 csillagászati kiindulópont hasonló adataival adjuk meg mind az 1, mind a 2 jelű rendszerben.

Ekkor azt kell figyelembe venni, hogy a pont (Φ, Λ) szintfelületi földrajzi koordinátái és H geoid (tengerszint) feletti magassága a természetben mért értékek, amelyek a dátum módosítása miatt nem változnak. Ezért a függővonal-elhajlás (322.2) és (322.3) alapösszefüggéseit és a geoidunduláció értelmezését tekintetbe véve, felírhatjuk azt, hogy

$$
\begin{aligned}
{}_1\xi + {}_1\varphi &= {}_2\xi + {}_2\varphi = \Phi \\
{}_1\eta/\cos\varphi + {}_1\lambda &= {}_2\eta/\cos\varphi + {}_2\lambda = \Lambda \qquad (4313.1) \\
-\,{}_1N + {}_1h &= -\,{}_2N + {}_2h = H.
\end{aligned}
$$

Ezekkel az összefüggésekkel mind a P_1 csillagászati kiindulópontban, mind valamely tetszőleges P pontban kapcsolatot teremtünk az ellipszoidi földrajzi koordináták valamint függővonal-elhajlás összetevők és geoidundulációk két különböző geodéziai dátumhoz tartozó értékei között. Ezzel pedig a feladatot visszavezettük az előző pontban mondottakra, azaz az ellipszoidi földrajzi koordináták átszámítására.

*

Mint láttuk, az 1 és a 2 jelű (pl. valamely helyi és geocentrikus vagy más tetszőleges két geodéziai rendszerben adott koordináták, függővonal-elhajlások, geoid-ellipszoid távolságok átszámítása megoldható, ha ismerjük legalább egyetlen pont mindkét (pl. a helyi és a geocentrikus) rendszerbeli ellipszoidi koordinátáit vagy függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát.

432. Az átszámítás hét paraméteres megoldása

Az eddigiekben feltételeztük, hogy az egyes helyi elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidok által meghatározott koordináta-rendszerek tengelyei a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulása) koordináta-irányaival − következésképpen egymással is − párhuzamosak. Ez esetben az egyes koordináta-rendszerek egymástól csak párhuzamos eltolással különböznek. Erre az (ideális) esetre vonatkozó koordinátaátszámítási összefüggéseket ismertünk meg az előzőekben [431.].

A geodézia törekszik ennek az elvi állapotnak az elérésére, de a valóságban ezt csak a méréseink megbízhatóságának megfelelő mértékben (jelenleg mintegy $\pm 1''$-en belül) sikerül megvalósítani. A koordináta-tengelyek ilyen mértékű nem párhuzamosságának hatása a koordináta-számításra ma már nem elhanyagolható, ezért átszámítási összefüggéseinket is pontosítani kellett.

Így térbeli derékszögű koordináta-rendszerek közötti koordináta-átszámításra jelenleg legelterjedtebben a *Helmert*-féle hasonlósági transzformációt használjuk. Ennek megfelelően azt feltételezzük, hogy a szóban lévő két koordináta-rendszer térbeli elhelyezésben, tájékozásban és méretarányban (is) különbözik egymástól. Ekkor a két rendszer kapcsolatát az $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ eltolás-vektor (három összetevője), a három tengely körüli εx, εy, εz elforgatás és a κ méretarány különbségi tényező, összesen tehát 7 paraméter határozza meg.

Ennek megfelelően az 1 jelű $[X,Y,Z]$ és a 2 jelű $[x,y,z,]$ koordináta-rendszer közötti átszámítás az

$$ {}_1\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (1+\kappa)\,\mathbf{R}\ {}_2\mathbf{r} \tag{432.1}$$

alakban írható, ahol az átszámítandó pont 1, ill. 2 jelű rendszerbeli koordinátái

$$ {}_1\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad {}_2\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{432.2}$$

és

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\varepsilon_x) \cdot \mathbf{R}_y(\varepsilon_y) \cdot \mathrm{R}_z(\varepsilon_z) \tag{432.3}$$

a forgatási mátrixok szorzata. Mivel a tengelykörüli forgatási szögek, mint említettük, (1″-nél kisebb) kicsi szögek, a (432.3) az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \tag{432.4}$$

egyszerűsített alakban írható.

Ezekkel a koordináta-átszámítás 7 paraméteres modellje (amit Burša-Wolf modellnek is szoktak nevezni) végülis

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + (1+\kappa) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{432.5}$$

A benne szereplő 7 átszámítási paraméter számértékét tapasztalati úton, olyan pontok alapján határozzuk meg, amelyeknek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük. Ezekre a pontokra az ismert koordinátákkal a (432.5)-öt felírva, egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldásával az ismeretlen átszámítási paraméterek kiszámíthatók.

Ha csak egyetlen ilyen pontunk van, akkor 3 skalár egyenlet felírásával az eltolás-vektor (X_0, Y_0, Z_0) három összetevőjét tudjuk meghatározni azzal a feltevéssel, hogy $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, és $\kappa = 0$, azaz, hogy a koordináta-tengelyek párhuzamosak és a két koordináta-rendszer között nincs méretarány különbség. (Ez volt a [431.]-ben tárgyalt eset, amit, tehát − különleges esetként − a 7 paraméteres megoldás is magába foglal.)

Ha van a hálózatunkban legalább két olyan pontunk, amelynek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük, akkor a felírható 6 skalár egyenletből az eltolás vektor három összetevője mellett, a koordináta-tengelyek nem párhuzamosságát kifejező ε_x, ε_y, ε_z forgatási szögeket is ki tudjuk számítani. Ehhez már csak azt kell feltételezni, hogy $\kappa = 0$, azaz, a két koordináta-rendszer között nincs méretarány különbség. A két rendszer egymáshoz viszonyított helyzetét jellemző 7 paraméter közül a kiszámítandó 6 ismeretlent, természetesen másként is megválaszthatjuk (ha pl. valamelyik mennyiség számértékét már előre ismerjük, vagy megkötjük).

Ha legalább három, vagy ennél több olyan pontunk van, amelynek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük, akkor a felírható egyenletekből már mind a 7 átszámítási paraméter számértéke meghatározható, sőt mivel ez esetben „fölös számú” egyenletünk is van, az ismeretlen paraméterek a legkisebb négyzetek módszerével számíthatók. A gyakorlatban arra törekszünk, hogy minél több pont alapján tudjuk az átszámítási paramétereket meghatározni, és azok eloszlása az átszámítandó pontmező (hálózat) teljes területét jól fedje le.

Mivel a gyakorlatban az ismert koordináták mind mérésekből származnak, számolnunk kell azzal, hogy a hálózatunk a mindkét rendszerben ismert koordinátájú pontokra ellentmondásmentesen nem illeszthető rá, vagyis *maradék ellentmondások lesznek*. (A legkisebb négyzetes számítás során éppen ezek négyzetösszegének minimum feltételét írjuk elő.) A maradék ellentmondások elemzésével lehet a hálózat esetleges szabályos hibaforrásait felderíteni. Vektorok alakjában térképi ábrázolásuk sok érdekes következtetésre ad lehetőséget. Minden esetre tudnunk kell, hogy a különbözőségek részben a geodéziai dátum adatokban lévő eltérésekből (a vonatkoztatási ellipszoid egymástól különböző mérete, alakja, elhelyezése, tájékozása), részben pedig a hálózat méréseiben és számításában rejlő szabályos hibákból adódnak.

A mai geodéziai gyakorlatban a 7 paraméteres megoldást kiterjedten használjuk, egyrészt ugyanazon alappont-hálózatnak különböző helyi geodéziai dátumok átszámítására, másrészt a helyi elhelyezésű (hagyományos) hálózat pontjainak geocentrikus (ITRS, ill. WGS84) rendszerbe, vagy fordítva, pl. GPS-méréssel meghatározott új pontoknak geocentrikusból a helyi rendszerbe átszámítására. Utóbbi esetekben a hálózat mesterséges holdas módszerrel is meghatározott pontjai képezik azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük.

44. A Magyarországon alkalmazott geodéziai dátumok és kapcsolataik

A Magyarországon eddig bevezetett vonatkoztatási ellipszoidok geometriai jellemzőit megbízhatósági mérőszámukkal együtt, továbbá az alkalmazott geodéziai dátumok jelölését a *44.1 táblázatban* tüntettük fel.

A *441.1. táblázat*ban a Magyarországon az elmúlt közel két évszázad folyamán kifejlesztett négy országos háromszögelési hálózatunkhoz felvett, ill. nemzetközi együttműködésekhez is kapcsolódó geodéziai dátumok főbb elhelyezési adatait foglaltuk össze.

44.1. táblázat

A Magyarországon alkalmazott vonatkoztatási ellipszoidok geometriai adatai és megbízhatósági mérőszámuk

Geodéziai dátum elnevezése	Vonatkoztatási ellipszoid		
	megnevezése, éve	fél nagytengely (*a*) [m]	lapultság (f)
OZ1845	Oriani/Zach (1807/1812)	6 376 130	1:310
	Walbeck (1819)	6 376 896 ±123	1:(302,78 ±2,0)
B1860, B1892 (MGI) B1908, B1944 (DHG)	Bessel (1841)	6 377 379,155	1:(299,1528 ±4,7)
ED50, H1966, ED87	Hayford (1909)	6 378 388 ±18	1:(297 ±0,5)
S42/58, FAGH (1972) S42/83	Kraszovszkij (1940)	6 378 245 ±15	1:(298,3 ±0,4)
HD72	GRS67 (1967)	6 378 160	1:298,247 164 27
WGS72	WGS72 (1972)	6 378 135 ±5	1:298,26
ETRS89	GRS80 (1980)	6 378 137	1:298,257 222 101
WGS84	WGS84 (1984)	6 378 137 ±2	1:298,257 223 563

441. Háromszögelési alaphálózataink hagyományos (geometriai) elhelyezései

A *második katonai felmérés* céljára 1807-1869 között létesített háromszögelési hálózat helyszíni és számítási munkáival foglalkozó utasításokat (többek között a geodéziai dátum felvételét is) 1810-ben és 1845-ben adták ki Bécsben. Az 1810-es utasításban a számítás alapfelületéül a *Delambre* által 1802-ben meghatározott ellipszoid adatait használták, de mivel részleteket nem találtunk elhelyezésére vonatkozóan, ezért a táblázatban ezt nem tüntettük fel. Az 1845-ben bevezetett vonatkoztatási ellipszoid nagytengelye az *Oriani* által 1807-ben közzétett ellipszoidé, lapultsága pedig az 1812-ben megjelentetett *Zách*-féle ellipszoidé, ezért használjuk a geodéziai dátum megnevezésére az **OZ1845** jelölést.

A *Walbeck*-ellipszoid volt az alapfelület 1859-1860-ban a *Gellérthegy* kezdőpont ellipszoidi földrajzi koordinátáinak levezetésekor, amelyeket *Bessel*-ellipszoidi koordinátákként fogadtak el. A *Bessel*-féle ellipszoidot több geodéziai dátum **(B1860, B1892(MGI), B1908 és B1944(DHG)**) létesítésekor használták az *1860. évi (második) felsőrendű háromszögelési hálózatunk* számítási munkálataival összefüggésben. (MGI a bécsi Katonaföldrajzi Intézet, DHG a 2. világháborús német katonai rendszer jelölése.)

A II. világháborút követően Magyarország korszerű geodéziai alapjainak létrehozása során két lépésben új I. rendű háromszögelési hálózatot létesítettek. Elsőként láncolatvázat hoztak létre 1948-1952 között, majd a második ütemben a dunántúli és a tiszamenti kitöltő hálózatrész mérésére került sor. Ezekből együttesen az ún. *felületi asztrogeodéziai hálózat*ot (FAGH) alakították ki. Az I. rendű háromszögelési hálózatunk pontjainak koordinátáit több helyi geodéziai vonatkoztatási rendszerben is meghatározták. Az egyes geodéziai dátumokat egyrészt a hálózati méréseknek önálló nemzeti kiegyenlítése keretében vették fel (mint pl. a **H1966** rendszer), másrészt nemzetközi együttműködések során kialakított egységes háromszögelési hálózatok vonatkoztatási rendszereként megadták számunkra. Ez utóbbival összefüggésben kell megemlíteni, hogy az ún. európai szocialista országok 1952-ben határozták el, hogy területükön *egységes asztrogeodéziai hálózat*ot (EAGH) hoznak létre. Az EAGH első kiegyenlítését 1958-ban végezték el, amelynek magyarországi részeként a láncolatvázat fogadták el. Az EAGH58 hálózat geodéziai dátumát a *Pulkovó* pontban 1942-ben elhelyezett *Kraszovszkij*-ellipszoid határozza meg. Az eredményül kapott koordináták vonatkoztatási rendszerét a továbbiakban **S42/58** jelöléssel látjuk el.

441.1. táblázat

A Magyarországon alkalmazott geodéziai dátumok elnevezése és elhelyezési adatai

	Geodéziai dátum elnevezése	Csillagászati kiindulópont neve	Ellipszoidi földrajzi		Dátumparaméterek		
			szélesség (φ) [° ' "]	hosszúság (λ) [° ' "]	ξ	η	ζ (N)
1	OZ1845	Bécs(Szent István templom tornya)	48-12-32,75	16-22-35,58	0,00"	0,00"	0,0 m

2	Walbeck	Bécs (régi egyetemi csillagvizsgáló)	48-12-35,50	16-22-49,98	0,00"	0,00"	0,0 m
3	B1860	Gellérthegy (levezetett)	47-29-14,93	19-03-05,67	-3,93"	- 5,91"	0,0 m
4	B1892 (MGI)	Bécs (Hermannskogel)	48-16-15,29	16-17-55,04	0,00"	0,00"	0,0 m
5a		Széchényihegy	47-29-37,53	18-59-31,08	0,00"	0,00"	0,0 m
5b	B1908	Gellérthegy (levezetett)	47-29-09,6380	19-03-07,5533	1,36"	- 7,19"	0,0 m
6	B1944 (DHG)	Gellérthegy (GK)	47-29-15,382	19-02-59,723	-4,38"	- 1,86"	0,0 m
7	H1966	Jobbágyihegy	47-49-55,15	19-42-40,56	- 2,31"	- 5,98"	30,0 m
8	S42	Pulkovo	59-46-18,55	30-19-42,09	+0,16"	- 1,78"	0,0 m
9	FAGH(1972)	Szőlőhegy	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46"	- 1,11"	6,56 m
10	HD72	Szőlőhegy	47-17-32,6156	19-36-09,9865	-2,18"	+0,14"	6,56 m
	ED50	Potsdam (Helmert-torony)	52-22-51,4456	13-03-58,9283	+3,36"	+1,78"	0,4 m
12	ED87	München (Mária-templ.t.)	48-08-22,2273	11-34-26,4862	-2,25"	+3,15"	0,7 m
13	WGS72 (Doppler)	Szőlőhegy (geocentrikus)	47-17-31,60	19-36-05,99	-1,16"	+2,84	40,20 m
14	ETRS89 (~WGS84)	Szőlőhegy (geocentrikus)	47-17-31,6665	19-36-05,9394	-1,23"	+2,88"	42,85 m

A felületi csillagászati-geodéziai hálózatunk méréseinek *önálló nemzeti kiegyenlítését* 1972-ben végezték el, először a *Kraszovszkij*-ellipszoidon, amelyet *Szőlőhegy* pontban helyeztek el úgy, hogy a pont S42/58 rendszerbeli koordinátáit rögzítették. A hálózat pontjai koordinátáinak vonatkoztatási rendszerét **FAGH** rövidítéssel jelöljük.

Célszerűségi okok miatt a hálózatunkhoz 1972-ben új geodéziai dátumot is vezettek be, amely az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) alapjául szolgál még ma is. Ezt a geodéziai dátumot **HD72**-vel jelöljük. Ennek alapfelülete a GRS67 vonatkoztatási rendszer *RE67* jelű forgási ellipszoidja (amit szokásos *IUGG 1967* jelöléssel is említeni), amelyet *Szőlőhegy* pontban úgy vettek fel, hogy az ellipszoidot a geoid magyarországi felületdarabjához *simuló helyzetbe* hozták.

A teljes felületi csillagászati-geodéziai hálózatunkat az 1980-as évek elején bevonták az EAGH 1983. évi újabb kiegyenlítésébe. Ennek vonatkoztatási rendszerét **S42/83**-mal jelöljük.

Végül az 1989. évi politikai változásokat követően hálózatunkat bevonták a nyugat-európai országok **ED87** jelű egységes háromszögelési hálózatába is. A külföldön végzett számítási munkálatok eredményeként nyert ED87 rendszerbeli koordinátákat megkaptuk. Az ED87 alapfelülete a *München* pontban elhelyezett *Hayford*-féle ellipszoid.

Ezzel tehát háromszögelési alaphálózatunk mindkét létező európai regionális hálózat (S42/58, illetve S42/83 és ED87) részévé vált (természetesen valamelyest különböző koordinátákkal).

442. Alaphálózataink elhelyezése mesterséges holdak észlelésével

Az *Egységes Országos Vízszintes Alapponthálózatunk* (EOVA), és később az *Egységes Országos Magassági Alapponthálózatunk* (EOMA) korszerűsítése és továbbfejlesztése céljából *stelláris háromszögelési hálózatot* és műholdas *Doppler-méréseket* végeztünk az említett hálózatok kiválasztott pontjain az 1980-as évek folyamán. A szóban lévő mérések geodéziai célú hasznosításának elsődleges célja az, hogy az EOVA vonatkoztatási ellipszoidjának (koordináta-rendszerének) a Föld tömegközéppontjához és a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (akkor ennek CIO-BIH megvalósulása) *Z* tengelyéhez viszonyított *geocentrikus térbeli elhelyezkedését* számszerűen megállapítsuk. További cél a hálózat *méretarányának* ellenőrzése valamint finomítása, továbbá a lehetőségekhez képest a hálózatunk esetleges belső *szerkezeti torzulásainak* feltárása volt. A *Doppler*-mérések akkori vonatkoztatási rendszere a geocentrikus **WGS72** volt.

Később a *GPS-technika* széles körű hazai alkalmazása céljából *országos GPS-hálózatot* (OGPSH) létesítettek, amely 1153 pontból áll (ebből 81 egybeesik az I. rendű háromszögelési hálózatunk pontjaival).

Az OGPSH kialakítása 1991-re nyúlik vissza, amikor is Magyarországon 5 ponton végeztek csatlakozó GPS-méréseket az EUREF hálózathoz, majd ezt követően további 19 ponton, létrehozva a *24 pontból álló kerethálózatot*. Ezt a hálózatot sűrítették 1995-97 folyamán további 1129 pont lemérésével. Jelenleg az ún. *aktív GPS-hálózat* kiépítését végzik a FÖMI-KGO munkatársainak irányításával. Az aktív GPS-hálózat célja többek között az állami földmérési feladatok ellátása mellett a térinformatika és a navigáció alkalmazásának segítése.

A GPS-mérések feldolgozásának *geocentrikus* vonatkoztatási rendszere a **WGS84** jelű geodéziai vonatkoztatási rendszer. (Mint már említettük, a kapott WGS84 koordináták – figyelemmel a meghatározás megbízhatóságára – gyakorlatilag ITRS koordinátáknak is tekinthetők [161.]).

A koordináta-rendszerek tárgyalásakor már azt is említettük, hogy Európa egységes geodéziai-geodinamikai alapjainak kontinentális kiterjedésű fokozatos létrehozása keretében, a korszerű műholdas GPS-technika alkalmazásával, szélső pontosságú 3D hálózatot (EUREF) hoznak létre, melynek ún. kvázi-geocentrikus vonatkoztatási rendszerét *Európai Földi Vonatkoztatási Rendszernek* (European Terrestrial Reference System 1989) nevezzük és **ETRS89**-el jelöljük [161.]. (Az ETRS89 jelű vonatkoztatási rendszer is geocentrikus volt, és az 1989.0 epochában egybeesett a WGS84-gyel, azonban ettől az időponttól kezdve az ETRS89 rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjától definíció szerint (az európai tábla mozgásával) fokozatosan eltér.)

Ezt a rendszert a tudományos közösség a legalkalmasabb európai geodéziai dátumnak tekinti, melyet az *Európai Bizottság* (European Commission) minden bizonnyal hivatalos geodéziai dátummá fog nyilvánítani adatainak vonatkoztatására. A szakemberek azt ajánlják, hogy a jövőben az ETRS89-et használják az EU tagországain belül a különböző földmérési és térinformatikai termékek és adatbázisok térbeli vonatkoztatására, és támogatják az ETRS89 széles körű alkalmazását valamennyi tagállamon belül. Néhány európai szervezet (a polgári repülés, az ipar egyes területei és a NATO, stb.) már egységesen alkalmazza és néhány EU-tagállamban (pl. Norvégiában) már nemzeti geodéziai dátumként fogadták el.

Az elmondottaknak megfelelően, a legújabban kifejlesztett geodéziai alappont-hálózatunk, az OGPSH koordináta-rendszere a kvázi-geocentrikus ETRS89 rendszer. Ennek a hagyományos (geometriai) háromszögelési hálózatunkkal közös 81 pontja lehetőséget adott a hálózat pontjai HD72 koordinátáinak az ETRS89-be átszámítására is.

Végül a *442.1. táblázatban* bemutatjuk I. rendű háromszögelési alaphálózatunk *Szőlőhegy* csillagászati kiindulópontjának különböző geodéziai dátumokra vonatkozó φ, λ ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság koordinátáit, továbbá ξ, η függővonal-elhajlás összetevőit és N geoid-ellipszoid távolság értékeit. Ebből látható, hogy magyarországi viszonylatban mennyit változnak ugyanazon természetbeni pontnak az ellipszoidi koordinátái a dátumadatok különbözősége miatt.

442.1. táblázat

Szőlőhegy I. rendű háromszögelési pont ellipszoidi földrajzi koordinátái

és a dátumparaméterek értéke az egyes geodéziai dátumokban

	Geodéziai dátum elnevezése	Ellipszoidi földrajzi		Dátumparaméterek		
		szélesség (φ) [° ' "]	hosszúság (λ) [° ' "]	ξ ["]	η ["]	N [m]
1	B1908	47-17-34,07	19-36-14,91	-2,59	-1,60	?
2	H1966	47-17-34,30	19-36-13,12	-2,82	-0,38	30,00
3	S42/58	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46	-1,11	7,01
4	S42/83	47-17-32,946	19-36-11,872	-2,51	-1,15	8,02
5	FAGH (1972)	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46	-1,11	6,56
6	HD72	47-17-32,6156	19-36-09,9865	-2,18	+0,14	6,56
7	ED87	47-17-34,4922	19-36-08,8946	-4,14	+0,79	1,12
8	WGS72	47-17-31,60	19-36-05,99	-1,16	+2,84	40,20
9	EUREF89	47-17-31,6665	19-36-05,9394	-1,23	+2,88	42,85

443. Nemzeti vonatkoztatási rendszereink kapcsolatai

Háromszögelési hálózatunk pontjainak többféle geodéziai dátumra vonatkozó koordinátái alapján kiszámítottuk a 7 paraméteres modell [432.] átszámítási paramétereit a különböző magyarországi rendszerek között. A kapott eredményeket a *443.1 táblázat* mutatja.

A meghatározott transzformációs paraméterek számszerű értékei minden esetben szignifikánsak és azt mutatják, hogy geodéziai alaphálózataink vonatkoztatási rendszereinek koordináta-tengelyei egymással nem teljesen párhuzamosak és egymástól az eltolási paraméterek által jelzett távolságban helyezkednek el. A táblázat adatai szerint ezek a távolságok néhány métertől mintegy 130 m-ig terjedő nagyságrendbe esnek úgy, hogy a koordináta-rendszerek kezdőpontjai a geocentrum környezetében, egymástól mintegy 10-150 m-es tartományon belül vannak. A koordináta-tengelyek párhuzamosságát az elmúlt évtizedek mérés- és számítástechnikája mellett 1”-en belül biztosították. Az egyes geodéziai dátumok méretaránya is eltér egymástól. A méretarány-különbségi tényezőkre kapott értékek a földfelszíni távolságokban 1-5 mm eltérést jelentenek km-ként.

443.1 Táblázat

Transzformációs paraméterek és megbízhatósági mérőszámaik

Közös pontok száma	Áttérés a 2-es rendszerből az 1-be	Transzformációs paraméterek														Súlyegység középhibája	Szabadságfok
		Eltolási paraméterek						Méretarány-különbség		Forgatási paraméterek							
		X_0 [m]	m_{Xo} [m]	Y_0 [m]	m_{Yo} [m]	Z_0 [m]	m_{Zo} [m]	κ [ppm]	m_κ [ppm]	ε_z ["]	$m_{\varepsilon z}$ ["]	ε_y ["]	$m_{\varepsilon y}$ ["]	ε_x ["]	$m_{\varepsilon x}$ ["]		
165	**HD72-FAGH**	-34,12	*±0.04*	-53,06	*±0.04*	-72,22	*±0.05*	0,009	*±0.005*	0,137	*±0.001*	0,041	*±0,002*	0,118	*±0,001*	0,01	485
148	**ED87-HD72**	132,20	*±0.71*	28,96	*±0.68*	103,62	*±0.76*	1,036	*±0.073*	0,690	*±0.017*	0,005	*±0,029*	0,397	*±0,022*	0,13	434
148	**ED87-FAGH**	98,02	*±0.73*	-24,14	*±0.7*	31,36	*±0.78*	1,056	*±0.076*	0,827	*±0.017*	0,046	*±0,30*	0,517	*±0,023*	0,14	434
139	**ED87-S42/83**	96,06	*±0.78*	-29,20	*±0.73*	23,37	*±0.84*	2,116	*±0.078*	0,007	*±0.018*	-0,120	*±0,033*	-0,086	*±0,024*	0,13	407
139	**HD72-S42/83**	-35,33	*±0.54*	-57,86	*±0.51*	-80,49	*±0.58*	1,016	*±0.054*	-0,675	*±0.012*	-0,099	*±0,023*	-0,486	*±0,016*	0,09	407
139	**FAGH-S42/83**	-1,12	*±0.53*	-4,74	*±0.49*	-8,25	*±0.57*	0,993	*±0.053*	-0,811	*±0.012*	-0,139	*±0,022*	-0,605	*±0,016*	0,09	407
90	**S42/58-S42/83**	-18,30	*±2.19*	-16,74	*±2.07*	-27,45	*±2.34*	5,342	*±0.225*	-0,075	*±0.052*	0,119	*±0,090*	0,266	*±0,067*	0,34	260
90	**S42/58-ED87**	-114,31	*±1.61*	12,45	*±1.52*	-50,77	*±1.72*	3,214	*±0.166*	-0,078	*±0.038*	0,241	*±0,066*	0,357	*±0,049*	0,25	260
90	**S42/58-HD72**	16,73	*±2.13*	41,36	*±2.01*	52,96	*±2.27*	4,359	*±0.219*	0,603	*±0.050*	0,211	*±0,088*	0,742	*±0,065*	0,33	260
90	**S42/58-FAGH**	-17,49	*±2.15*	-11,76	*±2.03*	-19,29	*±2.30*	4,383	*±0.222*	0,739	*±0.051*	0,251	*±0,089*	0,861	*±0,065*	0,33	260
81	**ETRS89-HD72**	59,31	*±1.24*	-71,52	*±1.23*	-21,98	*±1.34*	1,277	*±0.128*	0,325	*±0.030*	0,432	*±0,051*	0,269	*±0,039*	0,16	243

11. Hét

5. A GEOID ÉS A FIZIKAI FÖLDFELSZÍN MEGHATÁROZÁSA

51. A feladat leírása

Láttuk, hogy a földalakot általában pontonként határozzuk meg [152.]. A meghatározandó felületen, a Föld elméleti vagy a fizikai alakjának felszínén kiválasztott pontok – a felsőgeodéziában általában a geodéziai alaphálózatok pontjainak, illetve geoidi megfelelőiknek – térbeli helyzetét a jelenlegi gyakorlatban általában ellipszoidi felületi koordinátákkal adjuk meg. Az eddigiekben megismertük azokat a módszereket, amelyekkel a Föld alakját jól megközelítő vonatkoztatási ellipszoid méretét és alakját, valamint a hozzá kapcsolódó – a Föld valódi nehézségi erőterét jól megközelítő – normál nehézségi erőtér jellemzőit meg lehet határozni [3.]. Megismertük továbbá a kiválasztott vonatkoztatási ellipszoid térbeli elhelyezésének megoldásait [4.].

<u>*Mesterséges holdak észlelésére támaszkodó módszerek*</u> (pl. a GPS) alkalmazásával a létesített geodéziai alapponthálózat pontjainak teljes értékű *térbeli* (háromdimenziós) *helymeghatározását* kapjuk eredményül. Ez azt jelenti, hogy egyetlen eljárásban meghatározzuk a hálózat pontjainak φ_i, λ_i ellipszoidi földrajzi koordinátáit és az ellipszoid feletti h_i magasságát. Ezzel a *fizikai földfelszín* geometriai meghatározását (legalábbis a felsőgeodézia feladatát képező részben) elvégeztük, de a felhasználó részére a földfelszíni pontok geoid (tengerszint) feletti magasságát is meg kell adnunk. A mesterséges holdas technikák esetén ezt akkor tudjuk megtenni, ha ismerjük (meghatározzuk) a *geoid* alakját is.

<u>*Hagyományos*</u> (szög- és távolságmérésekkel meghatározott) földfelszíni geodéziai hálózat esetében különválik a vonatkoztatási ellipszoid felszínén végzett *vízszintes* és a rá merőleges irányú *magassági* értelmű helymeghatározás.

Az ellipszoid és a hálózat egymáshoz viszonyított elhelyezésével és tájékozásával meghatározzuk a hálózat legalább egy pontjának (a csillagászati kiindulópontnak) a φ_1, λ_1 ellipszoidi földrajzi koordinátáit és a kiinduló oldal ellipszoidi azimútját. Ebből kiindulva, a hálózat mérési eredményei (szögek és távolságok) alapján, az I. geodéziai főfeladatnak (a Geodéziai alaphálózatok tantárgyban megismert) összefüggéseivel számíthatók a többi hálózati pontok φ_i, λ_i ellipszoidi földrajzi koordinátái. Ezzel az alaphálózati pontok *vízszintes* értelmű helymeghatározását elvégeztük.

A térbeli (háromdimenziós) helymeghatározáshoz azonban még hozzátartozik a harmadik koordináta, az ellipszoid feletti *magasság* meghatározása is. Ennek módszereit fogjuk tárgyalni ebben a részben. Az eljárások különböznek attól függően, hogy a Föld elméleti alakján (a geoidon), vagy a fizikai földfelszínen fekvő pontok helyzetét akarjuk magassági értelemben meghatározni. Ezért a két kérdést külön tárgyaljuk.

Először, a *geoid* meghatározására szolgáló módszerekkel ismerkedünk meg, mert erre egyaránt szükség van akár hagyományos, akár mesterséges holdas technikával dolgozunk.

52. A geoid meghatározása

A Föld elméleti alakjának vizsgálatához általában nem jelölünk ki külön e célra szolgáló pontokat (néhány kivételes esettől eltekintve), hanem erre a célra is a geodéziai alaphálózat pontjait – pontosabban geoidi megfelelőjüket – használjuk. Ez azt jelenti, hogy a geoidi pontok *vízszintes helyzetének* meghatározásával általában nem kell külön foglalkoznunk, mert ezek az alaphálózati pontok ellipszoidi normálisán, a geoidon fekvő pontok, ezért φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátáik megegyeznek a földfelszíni hálózati pontéval. Így a kérdés csak a harmadik koordináta, a geoidi pont *ellipszoid feletti magasságának*, más szóval az N geoid-ellipszoid távolságnak, vagy *geoidundulációnak* a meghatározása.

Ennek a feladatnak a megoldására a történelmi fejlődés során *geometriai* és *fizikai* módszerek alakultak ki.

521. A csillagászati szintezés

Ez az eljárás a geoid meghatározásának *geometriai* módszere, mely kizárólag szög és távolság jellegű mennyiségekre támaszkodik.

521.1. A csillagászati szintezés elve

A módszer alkalmazásakor mind a vonatkoztatási ellipszoidot, mind pedig a geoidot *tisztán geometriai felületként* kezeljük (elvonatkoztatva minden fizikai tartalomtól). Térbeli helyzetüket felületi normálisaik irányával jellemezzük. A geoidi felületi normális (a geoidi helyi függőleges) irányát a csillagászati-geodéziai módszerrel mért és a geoidra átszámított Φ, Λ *szintfelületi* (geoidi) *földrajzi koordinátákkal*, míg az ellipszoidi normális irányát a φ, λ *ellipszoidi földrajzi koordinátákkal* adjuk meg a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulásának) Z tengelyéhez és XZ síkjához, a kezdő meridiánsíkhoz viszonyítva.

A módszer használatának előfeltétele tehát, hogy legyenek olyan pontjaink, amelyekben *mindkét fajta koordinátákat ismerjük.* Ezek a gyakorlatban a geodéziai alaphálózat pontjai közül azok, ahol földrajzi helymeghatározás mérést is végeztünk (csillagászati-geodéziai pontok). Ilyenek általában egymástól, néhányszor 10 km távolságban állnak rendelkezésre (a földrajzi helymeghatározások magas idő-és költségigénye miatt nem sűrűbben).

A geoid alakját gyakran metszetek mentén tanulmányozzuk. (Mint később Iátni fogjuk, egymásra merőleges metszetekből valamely terület geoidképe is megszerkeszthető lesz.) A két felület, a *geoid* és az *ellipszoid* egymáshoz viszonyított helyzetét a felületi normálisok által bezárt szög, a $\theta(\xi,\eta)$ *függővonal-elhajlás* jellemzi.

A geoid-ellipszoid távolság $\Delta N_{1,k} = N_k - N_1$ megváltozását a P_1,P_k szakaszon a függővonal-elhajlás metszet irányába eső ϑ vetületének

$$\Delta N_{1,k} = N_k - N_1 = -\int_1^k \vartheta \; ds \approx \sum_{i=1}^{k} \tilde{\vartheta}_{i,i+1}\, s_{i,i+1} \qquad (5211.1)$$

vonalintegrálja adja meg, ahol $\vartheta = \xi \cos \alpha + \eta \sin\alpha$ *és* α a metszet azimútja. Ebből látható, hogy ezzel a módszerrel a geoid-ellipszoid távolságoknak *csak a különbsége* (vagy megváltozása) számítható ki, hasonlóan a szintezéshez, amely *magasságkülönbségeket* eredményez. (Innen van az eljárás elnevezése.)

Az (5211.1)-ben szereplő vonalintegrál analitikus kiszámításához ismerni kellene a függővonal-elhajlás ívhossz szerinti eloszlásának $\vartheta = \vartheta(s)$ függvényét. Ennek hiányában a metszetet a P_i ismert pontokkal $s_{i,\ i+1}$ véges hosszúságú szakaszokra osztva numerikus integrálást végzünk, ahol a szakaszok $\tilde{\vartheta}_{i,i+1}$ *átlagos függővonal-elhajlás* értékét az ismert értékek alapján valamilyen predikciós eljárással, számszerű, vagy rajzi úton határozzuk meg.

A geoid alakját legtöbbször É-D-i (azaz meridián), és K-Ny-i (azaz I. vertikális) irányú metszetben vizsgáljuk. Ekkor a függővonal-elhajlás megfelelő vetületét éppen a meridián irányú ξ és az I. vertikális irányú η összetevője adja.

521.2. A csillagászati szintezés gyakorlati végrehajtása

A geoid metszetének szerkesztésekor elsősorban az szükséges, hogy a kiválasztott metszet mentén csillagászati-geodéziai pontokat határozzunk meg, vagy ilyenek más munkálatok eredményeként már rendelkezésre álljanak. A szóban lévő csillagászati geodéziai pontok *ellipszoidi* földrajzi koordinátái általában alaphálózati, vagy ehhez kapcsolódó szög- és távolságmérések alapján határozzuk meg, míg *szintfelületi* földrajzi koordinátáit a Kozmikus geodézia tantárgyban megismert földrajzi helymeghatározási módszerekkel mérjük. A kétféle koordináták különbségéből számítjuk a metszetbe eső P_i csillagászati-geodéziai pontok függővonal-elhajlás értékét. Szükség esetén (ha a metszet általános irányú), az így nyert értékeket a metszet síkjára vetítjük. Az egymás utáni csillagászati-geodéziai pontok közötti véges szakaszokra határozzuk meg a geoid-ellipszoid távolság megváltozását a (5211.1) alapján, numerikus integrálással.

Ennek egyik megoldása a *rajzi eljárás*. Ez esetben derékszögű síkkoordináta-rendszerben ábrázoljuk az ismert függővonal-elhajlás értékeket a pontok ellipszoidi földrajzi koordinátáiból kiszámított metszetirányú ívhossz (távolság) függvényében. Az így kapott pontok összekötésével állítjuk elő a $\vartheta = \vartheta(s)$ függvénygörbe gyakorlati megközelítőjét. Az (5211.1)-ben szereplő integrál geometriai értelme éppen az ez alatti terület, amelynek nagyságát a rajzolt területek meghatározására szolgáló módszerek egyikével (pl. lamellázás, vagy planiméterrel lemérés) határozhatjuk meg.

Két csillagászati-geodéziai pont között a görbe alatti terület mérőszáma, megfelelő méretarány szorzóval ellátva, adja a geoid-ellipszoid távolságnak a két pont közötti megváltozását.

Ezeket a metszet kezdőpontjától folyamatosan összegezzük, és az így kapott értékeket a metszetbe eső ívhosszak függvényében ismét derékszögű síkkoordináta-rendszerbe felrakjuk. A kapott ponthelyeket folytonos görbe vonallal összekötve kapjuk a geoidnak a kiválasztott irányba eső metszetét. A görbe megrajzolásakor figyelembe kell venni, hogy ez a függővonal-elhajlások függvénygörbéjének integrálgörbéje, melynek például szélső értéke ott lehet, ahol a függővonal-elhajlások görbéje előjelet vált (nullahelye van) stb.

Valamely *terület geoidtérképének* előállításakor úgy járunk el, hogy először három példányban, megfelelő méretarányban papírlapra felszerkesztjük a szóban lévő területre a földrajzi koordinátahálózat képét (alkalmas vetületben). Az így elkészített lapok közül kettőre koordinátáik alapján felrakjuk a vizsgált területre eső csillagászati-geodéziai pontok helyét. Ezután beírjuk a kapott ponthelyek mellé az egyik lapra a ξ_i,

a másik lapra az η_i függővonal-elhajlás összetevő számértékét. Ezek között Iineáris interpolálással megszerkesztjük a ξ = állandó és az η = állandó értékű helyeket összekötő görbéket (izovonalakat).

Az így előállított izovonalas ξ és η ábráról, az izovonalak közötti lineáris interpolálással leolvasható a megfelelő sűrűségben megrajzolt hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaihoz tartozó függővonal-elhajlás összetevő értékek. Ezek alapján most már a megrajzolt hosszúsági vonalak mentén egymással párhuzamos meridián-irányú, a szélességi vonalak mentén pedig K-Ny irányú geoid-metszeteket tudunk szerkeszteni. Ennek során egyenként számítjuk a szélességi és a hosszúsági vonalak által határolt négyszögek sarokpontjai közötti geoid-ellipszoid távolság változásokat. Ezeket négyszögenként összegezve természetesen általában nullától különböző „záróhibára" jutunk.

Következő lépésként a szintezési hálózathoz hasonló módon, a közvetlen mérések kiegyenlítési módszerével, kiegyenlítjük a négyszögekből álló „magassági hálózatunkat”. Ennek eredményeként kapjuk az egyes oldalak kiegyenlített geoid-ellipszoid távolság különbségét, amelyeket valamely kiválasztott kiindulóponttól összegezve, megkapjuk a metszéspontok végleges geoid-ellipszoid távolságát a kiindulópontbeli értékhez viszonyítva.

A kiindulópont geoid-ellipszoid távolságát ezzel a módszerrel meghatározni nem lehet, ezt vagy önkényesen nulla, vagy valamilyen véges értékben felvesszük, vagy más (későbben tárgyalandó fizikai) módszerrel határozzuk meg.

A metszéspontok így nyert végleges geoid-ellipszoid távolság értékét a harmadik előkészített lapra, a megfelelő helyre beírjuk, majd a kapott értékek közötti lineáris interpolálással, megszerkesztjük a geoidnak a koordináta-számítás vonatkoztatási ellipszoidjához viszonyított izovonalas ábráját.

Hangsúlyozzuk, hogy az így kapott geoidkép *relatív ábrázolás*, amelynek alakulása döntően függ a vonatkoztatási ellipszoid méretétől, alakjától és elhelyezésétől, ezért alapvetően fontos, hogy ahhoz a *geodéziai dátumot is megadjuk*. Ugyanazon geoiddarab izovonalas ábrázolása lényegesen eltérő képet mutat, különböző dátumok mellett. (Jó példa erre, Nagy-Britannia geoidjának különböző vonatkoztatási rendszerekhez viszonyított, az előadási órán bemutatott, ábrázolása.) Ezért a kapott geoidkép esetleges fizikai (geofizikai, geológiai, stb.) értelmezésekor nagyon elővigyázatosnak kell lenni.

Ezzel a módszerrel készült 1967-ben, a felületi asztrogeodéziai hálózatunk (FAGH) mintegy 80 csillagászati-geodéziai pontjára támaszkodva, a geoid magyarországi darabjának az S42/58 pulkovói elhelyezésű Kraszovszkij-ellipszoidra vonatkoztatott ábrázolása (azzal az eltéréssel, hogy a geoid magassági elhelyezését az ország ÉNy szélén fekvő kiinduló pontban $N_1 = 0$ értékkel választották meg).

A módszer természetéből következik, hogy egységes geoidábrázolás csak azonos vonatkoztatási rendszerben kiszámított összefüggő geodéziai hálózat területéről készíthető. A különböző geodéziai dátumokra vonatkozó mozaikok összeillesztése csak más módszerekkel lehetséges (pl. [522.]). Ily módon az egész Föld geoidképe nem szerkeszthető meg tisztán csillagászati szintezéssel.

Az említett hátrány mellett a módszer előnye, hogy az ábrázolás megbízhatósága a pontsűrűséggel szinte tetszés szerint fokozható, így megfelelő pontsűrűség esetén ez az eddig ismert legmegbízhatóbb eljárás.

A *pontsűrűség* és *a geoidábrázolás megbízhatóságána*k (m_N középhibájának) kapcsolatára jó becslés *Muminagič* $m_N = 2{,}1^{[\mathrm{cm}]} \sqrt{s^{[\mathrm{km}]}}$ tapasztalati képlete (ahol s a csillagászati-geodéziai pontok átlagos távolsága). Vizsgálataink szerint általában 80÷100 km-es pontsűrűséggel a geoid fő formáit kaphatjuk meg mintegy ±0,4÷0,5 m középhibával. A részletek meghatározásához ennél nagyobb pontsűrűség kell, a domborzati viszonyoktól függően. *Síkvidéken* és H<1000 m *középhegységben* <15 km pontsűrűséggel érhető el ±0,1 m –nél jobb megbízhatóság, míg H>1000 m *magashegységben* ugyanilyen megbízhatóság eléréséhez 1,5÷3 km átlagos ponttávolság szükséges.

A nagy pontsűrűség előállítása azonban tetemes munkával és magas költségekkel jár, ezért csak kisebb kiterjedésű területeken jöhet szóba. Itt viszont kiválóan alkalmas a geoid helyi részleteinek (finomszerkezetének) meghatározására. Ilyen célú földrajzi helymeghatározás mérési munkákhoz előnyösen használható asztrolábiumként a 60°-os előtétprizmával ellátott automata szintezőműszer is, de az utóbbi időben, kimondottan erre a célra fejlesztették ki a könnyen szállítható, *automatizált digitális zenitkamarákat.*

A csillagászati szintezéssel meghatározandó geoidkép megbízhatósága, részletgazdagsága tovább növelhető akkor, ha a meghatározásba az eddigi tisztán geometriai adatok mellett *fizikai* jellegű mennyiségeket, nevezetesen *nehézségi mérések* eredményeit *is* bevonjuk. Ezeket többféle úton tudjuk erre a célra hasznosítani:

- a csillagászati-geodéziai mérésekkel meghatározott függővonal-elhajlás értékek *sűrítése* nehézségi rendellenességek, vagy gradiométeres mérések alapján,
- a függővonal-elhajlásoknak a szomszédos pontok közötti lineáris interpolálása helyett a környező nehézségi erőtér finomszerkezetének a figyelembe vétele (*csillagászati-gravimetriai szintezés.* Így készült, pl. a geoid magyarországi darabjának, még mindig az S42/58 elhelyezésű Kraszovszkij ellipszoidra vonatkoztatott, de már gravimetriai mérési eredmények bevonásával finomított, „*asztro-gravimetriai geoidnak*” nevezett FAGRG80 ábrázolása),
- a geometriai és a fizikai jellegű mennyiségek együttes feldolgozása (*kollokáció).*

Ezeket a módszereket a mesterképzés *Fizikai geodézia* tantárgya tárgyalja.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlat segítségével, és bizonyítsuk a csillagászati szintezés alapelvét.
- Tudjuk-e biztosítani a gyakorlatban azt, hogy a geoid meghatározására szolgáló csillagászati-geodéziai pontok helyét a geoid jellemző formáinak figyelembevételével válasszuk meg?
- Mi határozza meg mértékadó módon a nyert geoidkép megbízhatóságát? Milyen tapasztalati összefüggéseket ismerünk ezzel kapcsolatban?
- Miért mondjuk a csillagászati szintezéssel nyert geoidképet többszörösen relatívnak?
- Mik a csillagászati szintezés előnyei és hátrányai?

12. Hét

522. A geoidmeghatározás fizikai módszereinek alapjai

A már megismert csillagászati szintezésben alapvetően geometriai (szög és távolság) jellegű mennyiségeket használtunk a geoid meghatározására [521.]. Láttuk, hogy ezzel a módszerrel mindig a geodéziai alaphálózat (a felhasznált csillagászati-geodéziai pontok) koordináta-számításának alapfelületeként bevezetett vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyított geoidábrázolást kapunk. Mivel a geometriai módszerek alkalmazásakor a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezése általában önkényes, vagy relatív (helyi simuló), ezért minden egyes önálló hálózat területén, az alkalmazott geodéziai dátumnak megfelelően, más és más a geoidkép viszonyítási alapja.

Ahhoz, hogy az egész Földön közös, geocentrikus elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyított geoid-ellipszoid távolságokat és ezzel egységes geoidképet (legalábbis ennek az egységes képnek egyes pontjait, vagy felületdarabjait) tudjuk előállítani, *fizikai geodéziai módszereket* kell igénybe venni.

Ezek közös jellemzője, hogy a geoidmeghatározást *fizikai feladatként* oldják meg. Ez azt jelenti, hogy a geoidot a valódi földi nehézségi erőtér valamilyen kiválasztott W_0 *potenciálértékű szintfelületeként* határozzuk meg. A feladat megoldási módszereinek egyik csoportja a nehézségi mérésekre támaszkodó *gravimetriai módszerek*, az eljárások másik csoportja a *Föld mesterséges holdjait* használja fel erre a célra. A fizikai geodéziai eIjárások nagyobb részének közös kiindulópontja a következőkben tárgyalandó nevezetes összefüggés.

522.1. A *Bruns*-féle összefüggés

Keressük a valódi földi nehézségi erőtér W_0 potenciálértékű (fizikailag létező) szintfelületének (a geoidnak) az alakját. Ehhez viszonyítási alapként elképzelünk valamely normál nehézségi erőteret, amely a valódit elég jól megközelíti, de ennél szabályosabb (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású. Nem feltétlenül szükséges, de gyakorlati okokból még azt is megkötjük, hogy az elképzelt normál nehézségi erőterünk egyik szintfelülete a Föld méretéhez és alakjához közelálló ellipszoid alakú szintfelület (szintellipszoid) legyen [343.]. Ennek potenciálértékét jelöljük U_0-val. (Az előbbi megkötés gyakorlati haszna az, hogy ugyanezt az ellipszoidot használjuk célszerűen a vízszintes koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidjának is).

Keressük tehát a *valódi erőtér W_0 és a normál nehézségi erőtér U_0 potenciálértékű szintfelületének távolságát* valamely P földfelszíni ponthoz tartozó ismert φ, λ ellipszoidi földrajzi koordinátákkal jellemzett ellipszoidi normális mentén mérve.

A földfelszíni P pont P' geoidi megfelelőjében a *valódi* és a *normál* nehézségi erőtér potenciáljának $T_{P'}$, különbségét nevezzük a P' pontbeli *potenciálzavarnak.*

Ennek kiszámításához szükséges a normálpotenciálnak a P' geoidi pontbeli $U_{P'}$ értéke. Ha a geoid − a Föld méreteihez viszonyítva − közel van a szintellipszoidhoz, vagyis a keresett N geoid-ellipszoid távolság viszonylag kicsi, akkor $U_{P'}$-t számíthatjuk az U függvénynek a P″ pontbeli N szerinti hatványsorából lineáris (1. fokú) közelítéssel. (P″-vel a földfelszíni P pont ellipszoidi megfelelőjét jelöljük). Felismerjük, hogy az ebben szereplő $(\partial U/\partial N)_{P''}$ első differenciálhányados éppen a normál nehézségi erőtér negatív gradiensének abszolút értéke, ami pedig a P″ pontbeli $\gamma_{P''}$, normál nehézségi térerősség nagyságát adja. A potenciálzavar kifejezésében az $U_{P''}$ normál potenciálértéket az ily módon előállított kéttagú sorral helyettesítve és összefüggésünket N-re megoldva, kapjuk *Bruns* nevezetes összefüggésének *általános* alakját, miszerint

$$N = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P''}} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_{P''}}. \tag{5221.1}$$

Ha kikötjük, mint általában, hogy a szintellipszoid és a geoid a normál ill. a valódi nehézségi erőtérnek azonos potenciálértékű szintfelülete, azaz $W_0 – U_0 \equiv 0$, akkor az (5221.1) *egyszerűsített* alakja

$$N = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P''}}. \tag{5221.2}$$

Az egyszerűsített *Bruns*-féle összefüggés tehát megadja a *valódi és a normál nehézségi erőtér azonos potenciálértékű szintfelületének távolságát,* és azt mutatja, hogy ez egyenesen arányos a geoidi potenciálzavar értékével. Ez a fizikai geodéziai módszerek többségének alapvető összefüggése.

A következő kérdés, ennek megfelelően a potenciálzavar meghatározása. Erre már több módszer is rendelkezésünkre áll, mi most először a gravimetriai megoldást fogjuk megismerni, mely a potenciálelmélet harmadik peremérték-feladatának megoldásán alapul.

Feladatok:

- Bizonyítsuk a *Bruns*-féle összefüggést!
- Elevenítsük fel a szintellipszoid és a normál nehézségi erőtér fogalmát [341.] és [343.]!

522.2. A poteciálelmélet peremérték-feladatai

A matematika peremérték-feladaton érti adott tartományban értelmezett függvények közül annak megkeresését, amely az adott tartomány határán (a peremfelületen) előirt feltételeknek eleget tesz. Esetünkben a potenciálzavar $T = W–U$ függvényét keressük. Erről mindenesetre tudjuk azt, hogy − mivel a centrifugális erőtér potenciálja a különbségképzésből kiesik − tömegvonzási potenciálok (nevezetesen a valódi földtömeg és a normál nehézségi erőtér forrását képező, a Föld tömegével egyenlő nagyságú, de szabályos eloszlású tömeg vonzási potenciáljának) különbsége.

Ez pedig akkor a Föld külső terében ki kell elégítse a rávonatkozóan felírható $\Delta T = 0$ *Laplace*-egyenletet (ahol Δ a *Laplace*-féle másodrendű differenciáloperátor), ami viszont másodrendű differenciálegyenlet a T függvény meghatározására. Korábbról [331.] tudjuk, hogy ennek általános megoldása végtelen sok gömbfüggvényből álló sor.

A *Laplace*-egyenlet megoldását képező harmonikus függvények összességéből (a gömbfüggvények végtelen sokaságából) ki kell választanunk azt, amely a Föld elméleti, vagy későbben majd a fizikai alakjának felszínén, a *peremfelületen*, előre számszerűen megadott feltételt (*peremfeltételt*) kielégít.

A matematika három peremérték-feladatot különböztet meg attól függően, hogy mik az adott peremértékek. Az *első peremérték-feladat* (*Dirichlet-probléma*) esetében a peremfelületen a keresett függvény által ott felveendő függvényértékek adottak.

Második peremérték-feladatról (*Neumann-problémáról*) beszélünk akkor, ha a peremfelületen a keresett függvény felületi normális irányú első differenciálhányadosának számértékei ismertek.

Végül *harmadik peremérték-feladattal* állunk szemben, ha a peremfelületen a keresett függvény ottani függvényértékei és felületi normális irányú első differenciálhányadosa valamilyen lineáris kombinációjának számértékei adottak.

A peremérték-feladatok különböző fajtáira a matematikában kidolgozott megoldások állnak rendelkezésre.

522.3. Peremfeltétel felállítása a geoidra

Keressünk olyan matematikai kapcsolatot, amely a T potenciálzavar egyelőre ismeretlen függvénye és a geoidon mérhető (vagy pontosabban a földfelszínen mérhető és a geoidra átszámítható) mennyiségek között fennáll.

Írjuk fel a geoidi P′ pontban az ottani valódi és a normál nehézségi térerősség különbségét. Vegyük figyelembe, hogy mindkettő a megfelelő potenciálfüggvény negatív gradiensének abszolút értékeként fogható fel, amely utóbbiak a megfelelő potenciálfüggvény függőleges (magasság) irányú első differenciálhányadosaként értelmezhetők. Ezeknek különbsége viszont a potenciálzavar függvényének függőleges-irányú differenciálhányadosával egyenlő.

Másrészt a P′ pontbeli nehézségi értékek különbségében szereplő $\gamma_{P'}$ geoidi normál nehézségi térerősség a γ függvénynek az ellipszoidi P″ pontban végzett N szerinti sorbafejtésével számítható ki.

Ha a $\overline{P'P''} = N$ távolság (azaz a geoid-ellipszoid távolság) a Föld méreteihez viszonyítva kicsi (*1. feltétel*), akkor elegendő a sorbafejtést a lineáris (1. fokú) tagig végezni és a sor többi tagjai elhanyagolhatók.

Helyettesítsük N értékét a *Bruns*-féle összefüggés egyszerűsített alakjával (*2. feltétel:* $U_0 = W_0$), és rendezzük a kapott tagokat a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} - \frac{1}{\gamma_{P'}}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_{P''} T_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) = -\Delta g_{P'} \qquad (5223.1)$$

alakra. Ennek jobb oldalán ismert kifejezés, a *geoidi nehézségi rendellenesség* áll, amelyben $g_P{}'$, a földfelszínen mérhető és a geoidra átszámítással nyerhető *valódi* és $\gamma_{P''}$ pedig a vonatkoztatási rendszernek megfelelő képletből a szintellipszoid felszínén fekvő P″ ponthoz kiszámítható *normál* nehézségi érték. (Ezek különbségét neveztük már korábban [333.] (és a Geofizika tantárgyban is) nehézségi rendellenességnek, vagy anomáliának.)

Számítsuk ki a (5223.1) bal oldali második tagjában a T függvény együtthatóját azzal a közelítéssel, hogy a lapultság elhanyagolásával az ellipszoidot a Föld tömegével megegyező M tömegű (*3. feltétel*), az ellipszoidéval azonos térfogatú homogén gömbbel helyettesítjük, amelynek sugara R. A keresett együtthatót ennek külső erőterében számítva az (5223.1)-nek a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P'} + \frac{2}{R} T_{P'} = -(g_{P'} - \gamma_{P''}) = -\Delta g_{P'} \qquad (5223.2)$$

jó közelítő alakjára jutunk, amelyben az elhanyagolás a lapultság ($f \approx 1/300$) nagyságrendjének felel meg.

A jobb oldal számszerű ismeretében az (5223.1) vagy az (5223.2) közelítő alak elsőrendű lineáris differenciálegyenlet az ismeretlen T függvény meghatározására, amit a *fizikai geodézia alap differenciálegyenletének* szokás nevezni.

Mivel azonban a Δg nehézségi rendellenességek nem az egész térben, hanem *zárt felület (a geoid) mentén* tekinthetők ismertnek, az (5223.1)-ből, vagy az (5223.2) közelítő alakból, a T függvény *térbeli* eloszlása közvetlenül nem határozható meg. Alkalmas ez az egyenlet azonban arra, hogy, ha ismerjük a T függvény általános alakját, akkor *peremfeltételként* szolgáljon az azt kielégítő konkrét függvény kikereséséhez.

Korábban már megállapítottuk [331.], hogy ha a külső térre korlátozódunk (4. feltétel), akkor a potenciálzavar T függvényének általános alakja a $\Delta T = 0$ *Laplace*-egyenlet megoldásainak összességét tartalmazó végtelen gömbfüggvénysor (amely a [331.]-ben, megismert alakból származtatható, ha ezt mind a valódi, mind a normálpotenciál függvényre alkalmazzuk). Ebből az (5223.1), vagy az (5223.2) kifejezést peremfeltételként használva, a mért peremértékek alapján meghatározható az ezt kielégítő gömbfüggvénysor együtthatóinak számszerű értéke. Az (5223.1), vagy az (5223.2) alakilag a *harmadik peremérték-feladat* peremfeltételének felel meg.

Megjegyezzük, hogy a 4. érvényességi feltétellel előírtuk a földfelszínen mért nehézségi értékek geoidra átszámításának módját is. Ennek olyannak kell lennie, hogy eredményül azt a nehézségi értéket adja, amit a *geoidon mérnénk, ha fölötte tömegek nem lennének.*

Felírva a T függvény térbeli gömbfüggvénysorának általános alakját a geoidot közelítő R sugarú gömb külső terére, képezzük ennek a helyvektor (azaz a magasság) irányú első differenciálhányadosát, és az így nyert alakokban a geoidi P′ pont helyvektorát a geoidot közelítő gömb R sugarával helyettesítve, előállíthatjuk a T függvény és első differenciálhányadosa P′ geoidi pontbeli értékét gömbfüggvény alakban. Ezeket az (5223.2) peremfeltételben szereplő $(\partial T/\partial H)_{P'}$ és $T_{P'}$ helyére beírva, a lehetséges összevonások után (és az előjelet megfordítva) megkapjuk az

$$\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\;T_n(\vartheta,\lambda)=\Delta g_{P'} \tag{5223.3}$$

peremfeltételt a geoidra gömbfüggvénysor alakjában.

Keressük tehát a potenciálzavar T függvényének azt az alakját, amelyik a geoidon az (5223.2), vagy az (5223.3) alakban most felállított peremfeltételt kielégíti.

522.4. Megoldás a potenciálfüggvény gömbfüggvénysorával

A potenciálzavart a valódi és a normál nehézségi erőtér potenciáljának $T = W - U$ különbségeként értelmeztük.

A *valódi földi nehézségi erőtér W* potenciálja a külső térben (a *Laplace*-egyenlet általános megoldásaként) a [331.2.]-ben tárgyalt feltételek mellett a (3312.15) alakú gömbfüggvénysor és a forgásból származó V_F potenciál összegeként fejezhető ki.

A *normál nehézségi erőtér* forgási és egyenlítői szimmetriás U normál potenciálfüggvénye az

$$U=\frac{kM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}J_{2n}^{*}\;P_{2n}(\sin\psi)\right]+V_F \tag{5224.1}$$

alakban írható, ahol a az ellipszoid egyenlítői fél nagytengely hossza, J_{2n}^{*} pedig a normál nehézségi erőtér forrását képező tömeg külső mechanikai hatásait jellemző gömbfüggvény-együtthatók. Ez az alak burkoltan, az eddigieken túl, további három feltételt tartalmaz. Nevezetesen azt, hogy a normál erőtér leírásához használt koordináta-rendszer O kezdőpontját a forrását képező tömeg tömegközéppontjába helyezzük (*5. feltétel*), továbbá, hogy ez a tömeg a Föld tömegével megegyező nagyságú (*6. feltétel*), és ezt a tömeget, képzeletben, a Föld valódi forgási sebességével forgatjuk meg (*7. feltétel*).

A T függvény gömbfüggvénysorának a geoidi P′ pontbeli *általános* alakját megkapjuk, ha az előbbi két potenciálfüggvény különbségét képezzük ebben a P′ pontban. Ebből V_F kiesik, és élünk az $r_{P'} \approx a \approx R$ közelítéssel, így

$$T_{P'} = T(R,\psi,\lambda) = -\frac{kM}{R}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\delta J_n\ P_n(\sin\psi) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right], \tag{5224.2}$$

ahol

$$\delta J_2 = J_2 - J_2^{*}$$

$$\delta J_3 = J_3$$

$$\delta J_4 = J_4 - J_4^{*}$$

. . . .

Az így nyert gömbfüggvénysor lesz tehát a potenciálzavar T függvénye. Ebben az *általános* alakban szereplő δJ_n, $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ együtthatók számértékének meghatározásával kell kikeresnünk azt a konkrét, *számszerű függvényalakot*, amely a geoidra felállított peremfeltételnek eleget tesz.

Írjuk be a T függvénynek az előbbi különbségképzéssel nyert-általános gömbfüggvénysor alakját az (5223.3) peremfeltétel bal oldalára (és az oldalakat megcserélve) a

$$\Delta g_{P'} = -\frac{kM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left[\delta J_n\ P_n(\sin\psi) - \sum_{m=1}^{n}\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)P_{n,m}(\sin\psi)\right] \tag{5224.3}$$

alakra jutunk. Annyi ilyen alakú egyenletet írhatunk fel, ahány pontban mért nehézségi érték alapján ismert $\Delta g_{P'}$, geoidi nehézségi rendellenességünk van. Ezek számértékét a bal oldalra beírva, a jobb oldalon álló ismeretlen δJ_n, $C_{n,m}$ és $S_{n,m}$ együtthatókból az egyenletek számának megfelelő mennyiségűt ki tudunk számítani. (A gyakorlatban a felírható igen nagyszámú egyenletből ennél lényegesen kevesebb számú ismeretlen számértékét határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszere szerinti számítással.)

Az így kiszámított együtthatókkal már számszerűen felírhatjuk a T potenciálzavar gömbfüggvénysorának a kiszámított együtthatók számának megfelelő véges számú tagját. A ki nem számított együtthatók értékét ezúttal nullának tekintjük.)

Az így előállított gömbfüggvénysort az (5221.2) *Bruns*-féle összefüggés számlálójába beírva, kapjuk végeredményként az N geoid-ellipszoid távolságok $N(\psi,\lambda)$ gömbfüggvénysorát.

Ennek a meghatározásnak az az előnye, hogy $\psi \approx \varphi$, és λ helyére tetszőleges koordináta-párokat beírva, a Föld tetszőleges helyére számítható az $N(\varphi,\lambda)$ geoid-ellipszoid távolságok értéke. Így, például megfelelő programmal számíthatók a hosszúsági és a szélességi vonalak metszéspontjának tetszőleges sűrűségű hálózatához az N értékek, amelyek között azután izovonalakat szerkesztve, megrajzolhatjuk az egész Föld geoidjának izovonalas ábrázolását a felvett vonatkoztatási felülethez (szintellipszoidhoz) viszonyítva.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kapott geoid-ellipszoid távolságok *geocentrikus elhelyezésű* vonatkoztatási ellipszoidhoz viszonyítva értendők! Ezt azzal értük el, hogy a normálpotenciál (5224.1) gömbfüggvénysora (az 5. feltételnek megfelelően) nem tartalmaz 1. fokú tagot.

A geoidmeghatározás további gravimetriai módszereit, ahogyan pl. a magyarországi HGEO2000 jelű geoidábrázolás is készült, a mesterképzés *Fizikai geodézia* tantárgya tárgyalja.

Feladatok:

- Ismételjük át a földi tömegvonzás potenciálfüggvényének gömbfüggvény-soráról tanultakat [331.2.]!
- Vázlattal és matematikai gondolatsorral bizonyítsuk, hogy helyes a geoidra felállított peremfeltétel (5223.1) alakja!
- Esetünkben miért a harmadik peremérték-feladat megoldásáról beszélünk?
- Írjuk fel a potenciálzavar gömbfüggvénysorát a $W–U$ gömbfüggvény-sorok különbségeként!
- Írjuk össze N gömbfüggvénysorának érvényességi feltételeit!
- Számítsuk ki, hogy legalább hány egyenlet felírása (és ehhez hány mért nehézségi érték) szükséges, ha a potenciálzavar gömbfüggvénysorának együtthatóit $n = m = 8$ fok és rendig kívánjuk kiszámítani?

523. A geoid meghatározása szatellitageodéziai módszerekkel

Az utóbbi évtizedekben a Föld mesterséges holdjai és a rájuk vonatkozó geodéziai megfigyelések (észlelések) több geodéziai feladat megoldásához nyitottak új utakat. Így, a geoid meghatározása is lehetségessé vált a mesterséges holdakra végzett mérések geodéziai felhasználásával. Ennek több megoldása is kialakult az eltelt viszonylag rövid idő alatt.

523.1. A szatellitageodézia geometriai alkalmazása

Ez a megoldás már átmenet a geoid meghatározásának tisztán geometriai és fizikai módszerei között, mert a mesterséges holdak pályamozgása már fizikai törvényeken alapszik. Most azonban csak a mesterséges holdak geodéziai észleléséből meghatározott geometriai helymeghatározó adatokat (a helyvektort, vagy ennek térbeli derékszögű összetevőit) fogjuk a geoid meghatározására felhasználni.

A megoldást olyan földfelszíni pontokban tudjuk használni, melyeknek *térbeli* helyzetét mesterséges holdak észlelésével, a *geoidhoz viszonyított* (magassági) helyzetét pedig szintezéssel (GPS + szintezés) (esetleg trigonometriai magasságméréssel) meghatároztuk.

Ez esetben a pontnak a mesterséges holdas technikával meghatározott helyvektorából először kiszámítjuk a φ, λ, h ellipszoidi koordinátahármasát, majd az így kapott h ellipszoid feletti magasságából a pont geoid feletti H magasságát levonva, kapjuk a geoidnak az

$$N = h - H$$

ellipszoid feletti magasságát (a geoid-ellipszoid távolságot, a meghatározott földfelszíni pont ellipszoidi normálisán mérve). Ezt több pontban elvégezve, az így kapott geoidi pontokból metszetet, vagy izovonalas felületi ábrázolást szerkeszthetünk. Így készült, pl. a FÖMI KGO-ban a magyarországi „*GPS-geoid*" az OGPSH 275 szintezett pontja alapján.

Az így kapott geoidkép geodéziai dátumadatai *egyedi pontmeghatározások* esetében megegyeznek a mesterséges holdas helymeghatározás vonatkoztatási rendszere által meghatározott dátumadatokkal. (Pl. GPS-szel mért pontok esetén általában a WGS84 rendszer *geocentrikus elhelyezésű* ellipszoidja.) Ha a geoid meghatározásához felhasznált pontjaink helyzetét valamilyen más (pl. Európában az ETRS89) rendszerben adott koordinátájú hálózati pontokra támaszkodó *relatív* mérésekkel határozzuk meg, akkor a kapott geoidkép geodéziai dátumadatai, természetesen, ennek a rendszernek a dátumadataival egyeznek meg (pl. az ETRS89 *„kvázigeocentrikus" elhelyezésű* ellipszoidja). Ilyen az említett magyarországi *GPS-geoid* is.

A módszer alkalmazásának legnagyobb előnye abban rejlik, hogy a földfelszín bármely helyén így meghatározott geoidi pont ellipszoid feletti *N* magassága *ugyanazon geocentrikus elhelyezésű ellipszoidra* vonatkoztatható. Ezért előnyösen alkalmazható, pl. az egymástól független geodéziai hálózatokban csillagászati szintezéssel meghatározott és helyi geodéziai dátumra vonatkozó (relatív) geoidábrázolások közös geocentrikus rendszerbe kapcsolásához. Ezt a módszert a gyakorlatban egyrészt ez utóbbi célra, másrészt a geoidhoz simuló ellipszoid méretének és alakjának meghatározására használjuk [324.].

Hasonló módon alkalmazható a gravimetriai mérési eredményekből (a Fizikai geodézia tantárgyban tárgyalandó módszerrel) alkotott geoidképnek a szintezett GPS-pontokban meghatározott *N* értékekre illesztésére is. Így készült a magyarországi geoiddarab HGGGEO2000 jelű *GPS-gravimetriai* ábrázolása, mely jelenleg a hazai állami alapmunkálatokban „hivatalosan" használandó, és a Földmérési és Távérzékelési Intézet (FÖMI) adatszolgáltatási rendszeréből nyerhető. Ez az ETRS89 (európai) vonatkoztatási rendszer „kvázigeocentrikus" elhelyezésű, GRS80 méretű és alakú ellipszoidjára vonatkoztatott geoid-ellipszoid távolságokat ad. (2005-től várható ennek HGGGEO2004 jelű újabb változata.)

523.2. A dinamikai szatellitageodéziai módszerek alkalmazása

A bolygók mozgásának törvényszerűségeit már *Kepler* felismerte, és tapasztalati úton felállított törvényeivel leírta. Később *Newton* az általános tömegvonzás törvényének felismerése után, ennek alapján megadta a *Kepler*-féle törvények egységes fizikai magyarázatát. Ezzel világossá vált, hogy a Föld közelében mozgó égitestek pályáját a Föld nehézségi erőtere szabja meg. Így könnyen belátható, hogy ezeknek az égitesteknek a pályáját megfigyelve, következtetni lehet a földi nehézségi erőtér szerkezetére. (Ennek a módszernek a részleteivel a mesterképzés *Dinamikai szatellitageodézia* tantárgya foglalkozik, itt most vázlatosan csak a módszer lényegét foglaljuk össze. Emlékeztetünk, hogy a pályamozgással kapcsolatos elemi ismeretekkel pedig a *Globális helymeghatározás* tantárgyban találkoztunk.)

Az égitestek pályamozgását a dinamika *Newton*-féle alaptörvénye segítségével lehet leírni. A *dinamikai egyensúly* feltétele az ismert

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad (5232.1)$$

összefüggés.

Legegyszerűbb esetben M tömegű, pontszerűnek tekinthető központi égitest körül (központos erőtérben) mozgó egységnyi (1 kg) tömegpont mozgására alkalmazzuk ezt az alapösszefüggést (ún. *kéttest-probléma*), azzal a feltétellel, hogy az erőtér csak *Newton*-féle tömegvonzásból származik.

Ez esetben a mozgó tömegpontra ható összes erő **F** eredője a tömegvonzási erőhatás, és fejezzük ki az eredő gyorsulást a helyvektor időszerinti második deriváltjaként. Így a

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (5232.2)$$

mozgásegyenletre jutunk. Ennek megoldásaként kapjuk a *Globális helymeghatározások* tantárgyból ismert azt az eredményt, hogy a tömegpont *pályája* kúpszelet, a Föld természetes és mesterséges holdjai esetében ellipszis, amelynek térbeli helyzetét, méretét és alakját az Ω, ω, i, a_s, e_s és T, vagy röviden p_i (i = 1, 2, …6) *Kepler*-féle pályaelemek jellemzik. (Itt T a perigeum ponton áthaladás időpontját jelenti.)

Ezek az (5232.2) másodrendű differenciálegyenletnek a kétszeri integrálása során belépő integrálási állandók, illetve belőlük levezetett állandó mennyiségek. Ebből következik az, hogy *(központos) centrális erőtérben* a tömegpont *térben és időben állandó méretű, alakú és helyzetű ellipszis pályán mozog.*

Tudjuk azonban, hogy a Föld valóságos nehézségi erőtere nem centrális erőtér. Ennek eltéréseit a centrális erőtértől a potenciál gömbfüggvény-sorának zonális és tesszerális tagjai írják le, melyeket most röviden az R függvénybe foglaltunk össze. Ezt figyelembe véve az (5232.1) baloldalán szereplő erőhatás kifejezésében, a valóságos földi nehézségi erőtérben az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{grad}\, R(J_n, C_{n,m}, S_{n,m}, \mathbf{r}) \qquad (5232\bullet3)$$

mozgásegyenletre jutunk. Ennek megoldása során már olyan *Kepler*-féle pályaelemeket kapunk, amelyek az idő függvényeként változnak. *A Föld valóságos nehézségi erőterében mozgó tömegpont pályája bonyolult térgörbe, melynek elemi szakaszai időben változó méretű alakú és helyzetű Kepler-féle ellipszis pályák elemi darabjainak tekinthetők.*

Tetszőleges p_i pályaelem $\dot{p}_i = dp_i/dt$ időbeli változása tehát a földi nehézségi erőtér nem centrális voltából következik. Matematikailag tehát az erőtérnek a központostól (centrálistól) való eltéréseit jellemző gömbfüggvény-együtthatókkal hozhatók

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i\,(J_n, C_{n,m}, S_{n,m}) \qquad (5232.4)$$

alakú függvénykapcsolatba.

Ennek figyelembe vételével a mesterséges hold pillanatnyi pályaelemeit adott időpontra (pl. valamely észlelés időpontjára) úgy kapjuk meg, ha valamely korábbi időpontra megadott $p_{i,\mathrm{o}}$ ún. *simuló pályaelemekhez* hozzáadjuk az eltelt időre eső megváltozásukat (ami viszont a nehézségi erőtér szerkezetének függvénye). Az így kapott *pillanatnyi pályaelemekből* számíthatjuk a *Globális helymeghatározás* tantárgyban megismert összefüggésekkel az észlelés pillanatára a mesterséges hold $\mathbf{r}_S$ *geocentrikus helyvektorát.*

Valamely időpontban a mesterséges holdra végzett észlelések eredményeként kapott **s** *észlelési vekto*r nem más, mint a mesterséges hold $\mathbf{r}_S$ és az észlelési hely $\mathbf{r}_P$ geocentrikus helyvektorának különbség-vektora.

Ennek megfelelően az **s** észlelési vektor az előrejelzés időpontjára vonatkozó p_{io} pályaelemek, a földi nehézségi erőtér potenciálfüggvényének J_n, $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ együtthatói, az észlelés t időpontja és az észlelési hely (álláspont) $\mathbf{r}_P$ helyvektorának

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P = \mathbf{s}(\Omega_o, \omega_o, i_o, a_o, e_o, T_o; J_n, C_{n,m}, S_{n,m}; t, \mathbf{r}_P) \qquad (5232.5)$$

függvényeként fejezhető ki.

Több mesterséges hold, több állásponton rendszeresen végzett nagyszámú megfigyelésének mindegyikére felírható egy-egy (5232.5) alakú egyenlet, amely így közvetítő egyenletként szolgálhat a jobb oldalán szereplő mennyiségeknek az észlelések alapján végzendő meghatározásához. A nagyszámú észlelés alapján felállítható javítási egyenletekből a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldással az egyenletek számánál minden esetre kevesebb számú ismeretlen mennyiség meghatározható. (Ennek részleteivel a mesterképzés *Dinamikai szatellitageodézia* tantárgya foglalkozik.)

A szatellitageodézia dinamikai módszerének legáltalánosabb alkalmazásakor az ismeretlenek mindhárom csoportjára keresünk megoldást. Gyakran azonban szétválasztjuk őket és egy-egy csoportra felvett korábbi értékekkel csak a fennmaradó ismeretleneket határozzuk meg, majd fordítva, és fokozatos közeledéssel finomítjuk az eredményt. Így végül megkapjuk a

- simuló pályaelemeket (valamely kijelölt időpontra),
- a nehézségi erőtér véges számú gömbfüggvény-együtthatóját és
- az álláspontok helyvektorát.

Az eredmények további finomítása érdekében a dinamikai megoldásokkal közös számítási eljárásba szokták bevonni a hálózati oldalakra a szatellitageodézia *geometriai* eljárásaival (szinkron irány- és távolság meghatározásokkal, stb) meghatározott térbeli irány és távolságokat is. Ilyenkor *kombinált megoldásról* beszélünk.

Ezzel a módszerrel már az 1980-as évek elején $n = m = 30$ fok és rendig terjedő gömbfüggvény együtthatók számértékét és az egész Földet beborító, akkor néhányszor 10 állomásból álló hálózat pontjainak geocentrikus helyvektorát határozták meg.

A gömbfüggvény-együtthatók meghatározásába az (5232.5) alakú egyenletek mellett bevonhatók a földfelszíni nehézségi mérések alapján felírható (5224.3) alakú egyenletek is. Annyi ilyen egyenlet írható fel, ahány mérési pontban $\Delta g_{P'}$ geoidi nehézségi rendellenességet tudunk számítani. Ezzel a meghatározó egyenletek (egyébként is nagy) száma még jelentősen növelhető, ami még több gömbfüggvény-együttható meghatározását teszi lehetővé. Ennek a megoldásnak további előnye, hogy a földfelszíni nehézségi mérések eredményei az erőtér eloszlásának finomabb részleteivel egészítik ki a mesterséges holdak észleléséből nyerhető főbb szerkezeti formákat (a hosszabb hullámú eloszlás-képet).

Ma már a gömbfüggvény-együtthatókat $n = m = 360$ fok és rendig, sőt azon túl is ismerjük, és több különböző *szatellita-geodéziai világhálózat* készült. A gömbfüggvény-együtthatók meghatározott értéksorát *geopotenciál modellnek* szokták nevezni. Ezek ismeretében számszerűen felírhatóvá válik a *földi tömegvonzási erőtér potenciálfüggvénye* (3312.15) alakú gömbfüggvénysorának véges számú tagja. Ezeket az értéksorokat a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) *Nemzetközi Geopotenciál Modellek Központja* (International Centre of Global Earth Models = ICGEM) gyűjti, és teszi közzé (http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html).

Megfelelő vonatkoztatási rendszer (vonatkoztatási ellipszoid és normál nehézségi erőtér) felvételével (mint, pl. jelenleg a WGS84 rendszerben) fel tudjuk írni a *T potenciálzavar (5224.2) alakú gömbfüggvény-sorának*, ugyancsak, véges, de nagy számú tagját.

A potenciálzavar ily módon számszerűen megismert gömbfüggvény-sorából kiszámított értéket a (5221.2) *Bruns*-féle összefüggésbe beírva és $\gamma_{P''}$-vel osztva, kapjuk a φ, λ ellipszoidi koordinátájú P pontbeli helyen az *N geoid-ellipszoid távolságot*.

Ezt a számítást a számítógéppel a φ, λ földrajzi koordináták megfelelően megválasztott kerek értékeihez elvégeztetve, megszerkeszthetjük és kirajzoltathatjuk a *geoid izovonalas ábrázolásá*t a választott vonatkoztatási rendszer geocentrikus elhelyezésű ellipszoidjához viszonyítva. Ezzel a módszerrel jó áttekintő képet nyerhetünk az *egész Föld geoidjáról*. A jelenleg elérhető megbízhatóság méter nagyságrendű középhibával jellemezhető. Az így és további más mérések bevonásával készített egész földi (globális) geoidábrázolásokat az IAG *Nemzetközi Geoid Szolgálata* (International Geoid Service = IGeS) gyűjti, és adja közre (http://www.iges.polimi.it/).

Kisebb kiterjedésű, gravimetriailag jól felmért terület még pontosabb, részletgazdagabb geoidábrázolása készíthető el, ha az így nyert (globális) geoidképet a helyi gravimetriai mérési eredményekkel tovább finomítjuk. Így készült, pl. Magyarországra a BME Felsőgeodézia Tanszékén a HGTUB2000 jelű geoidábrázolás, amely a GPM98CR jelű geopotenciális modellből számítható (egész földi) geoidkép helyi finomítása a szűkebb környezetünkben rendelkezésre álló mintegy 300.000 gravimetriai mérésből közel 26.500 rácspontra interpolált nehézségi rendellenességre és digitális terepmodellekre támaszkodik.

Feladatok

- Mutassuk be vázlaton a *Kepler*-féle pályaelemeket! – Elevenítsük fel a bolygómozgás *Kepler*-féle törvényeit!
- Hasonlítsuk össze a J_2 és a többi gömbfüggvény-együtthatók nagyságrendjét!

523.3. A szatellita-altimetria

Mint a Kozmikus geodézia tantárgyból már tudjuk, ez lényegében a mesterséges holdról a Föld felé függőleges irányban végzett lézeres távolság- (azaz magasság-) mérést jelent. Kimérhető lézer impulzus a tengerek felszínéről verődik csak vissza, így az eljárást a szárazföldek felett nem lehet alkalmazni.

Ha ismerjük a mesterséges hold mozgását leíró pályaelemeket, akkor az észlelés pillanatára számíthatjuk a mesterséges hold geocentrikus helyvektorát. Ebből levonva a tengerfelszín felett mért magasságát, megkapjuk a tengerfelszíni pontok geocentrikus helyvektorát. Ha ebből levonjuk a vonatkoztatási ellipszoid felszínéig tartó helyvektor hosszát, kapjuk a tengerfelszín és az ellipszoid közötti távolságot. Ezt még meg kell javítani a pillanatnyi tengerfelszín és a középtengerszint magasságában kijelölt szintfelület közötti távolsággal, amit a tengerfelszín topográfiájának nevezünk. Ez utóbbi mennyiség meghatározása az ún. *tengeri geodézia* egyik fontos feladata.

A magasságmérésben elérhető igen nagy megbízhatóságot (ami ± 0,1 m-nél is kisebb középhibával jellemezhető), sajnos, még nem tudjuk teljesen kihasználni a pálya és a tengerfelszín topográfiájának ennél kisebb megbízhatóságú ismerete miatt.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton a szatellitageodézia geometriai alkalmazásának elvét a geoid meghatározására! Mi szabja meg a geoid-ellipszoid távolság meghatározásának elérhető megbízhatóságát?
- Ismételjük át a szatellitageodézia dinamikai módszerének alapjait [Kozmikus geodézia 312.]!

- Mutassuk be vázlaton a szatellita-altimetria elvét! Milyen hatásokat tükröz a tengerfelszín topográfiája?

*

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy az eddigiek során négy olyan mennyiséggel ismerkedtünk meg, amelyek a valóságnak a képzeletbeli vonatkoztatási rendszerünkhöz viszonyított eltérését mutatják. Mindegyikük egy *természetbeni* (valódi) és egy, a vonatkoztatási rendszerben *számított* (képzeletbeli) érték különbsége, úm. :

- a függővonal-elhajlás: $\xi = \Phi - \varphi;$
  $\eta/\cos\varphi = (\Lambda - \lambda)$
- a geoid-ellipszoid távolság: $N = -(H - h)$
- a nehézségi rendellenesség: $\Delta g = g - \gamma$
- a potenciálzavar: $T = W - U.$

Ezek egymással rokon fogalmak, és egymásba átszámíthatók. Őket a Föld valóságos nehézségi erőtere és a normál nehézségi erőtér egymástól eltérésének, végső soron a geoid és a vonatkoztatási ellipszoid egymáshoz viszonyított helyzetének meghatározására használjuk. Elvileg bármelyik mennyiségre támaszkodva, végül ugyanarra az eredményre (geoidra) kell jutnunk. Hogy mikor, melyiket használjuk, azt a gyakorlati célszerűség szabja meg.

13. Hét

53. A fizikai földfelszín meghatározása

Emlékeztetünk arra, hogy a Föld fizikai alakjának, a fizikai földfelszínnek pontonkénti meghatározásakor a felsőgeodéziában a geodéziai alaphálózatok természetben kijelölt pontjainak térbeli helyzet-meghatározására gondolunk.

A meghatározandó földfelszíni pontok térbeli helyzetét általában a már megismert módon bevezetett vonatkoztatási ellipszoidhoz kapcsolódó φ, λ és h ellipszoidi koordináta-hármassal adjuk meg.

Ha a földfelszíni pont helyzetét *szatellitageodéziai módszerekkel* határozzuk meg, akkor közvetlenül a pont háromdimenziós helyvektorát (térbeli derékszögű koordinátáit) kapjuk eredményül. Ezt a megoldást főként geodéziai világhálózatok egymástól akár több ezer kilométerre fekvő néhány pontjának, továbbá egymástól nagy távolságokra lévő, különleges rendeltetésű pontok hálózatának, vagy, egyre szélesedő körben, helyi hálózatok, sőt, egyes pontok helyzetének meghatározására is használjuk. Ez az eljárás különösebb elvi kérdést nem vet fel. A gyakorlati felhasználás céljára a helyvektorból − megfelelő vonatkoztatási felület bevezetésével − *ellipszoidi koordináták* φ, λ, h hármasát számítjuk. Ez a földfelszíni pont térbeli (3 dimenziós) helymeghatározásához elvileg elegendő, de a felhasználói gyakorlat, e mellett, a pont *tengerszint (geoid) feletti H magasságát* is igényli.

A földfelszíni pontok helyzetének *hagyományos földfelszíni geodéziai mérésekkel* végzett meghatározásakor a pont vízszintes helyzetét jellemző φ *és* λ ellipszoidi földrajzi koordináták meghatározásának módját részben az Alaphálózatok tantárgy keretében, részben a korábbi részekben már megismertük.

A pontok ellipszoid feletti h magasságának meghatározásakor a feladatot általában két részre osztjuk, így h-t az *N geoid-ellipszoid távolságnak* és a pont *tengerszint feletti H* magasságának összegeként állítjuk elő. Ilyen értelemben a geoidnak az előzőekben [52.] tárgyalt meghatározása általában a fizikai földfelszíni pontok teljes értékű térbeli helyzet-meghatározásához is szükséges. (Megjegyezzük, hogy a későbbiek során olyan megoldást is meg fogunk ismerni, ahol a geoid meghatározására nem lesz szükség [533.].)

Az ellipszoid feletti magasság másik része pedig a földfelszíni pont geoid (tengerszint) feletti H magassága, melynek meghatározásával a következőkben foglalkozunk.

531. A geoid feletti magasság meghatározása

A *Geodézia* tantárgyból már tudjuk, hogy *magasságkülönbségen* a nehézségi erőtér szintfelületei között, a függővonal mentén mért távolságot, vagy röviden a két szintfelület távolságát értjük. *Magasságnak* valamely magassági alapszintfelülethez viszonyított magasságkülönbséget nevezzük. Attól függően, hogy a magassági alapszintfelületet önkényesen vagy valamely középtengerszint magasságában választjuk meg, relatív, illetve abszolút (tengerszint feletti magasságról beszélünk.

A magasságmeghatározás szabatos módszere a *geometriai szintezés* és különleges esetekben a *hidrosztatikai szintezés.* Megfelelő körülmények között alkalmazzuk még a *trigonometriai magasságmérést* is. (Ezzel későbbben külön fogunk foglalkozni.)

Ha *geometriai szintezést* végzünk, és követjük a szintezés szabályait, valamint feltételezzük, hogy a fénysugár terjedési görbéje és a szintfelületek alakja az előre és a hátra irányzáskor a műszerálláspontra szimmetriás, akkor elvileg minden műszerállásban, a leolvasások különbségeként, a kötőpontokon átmenő két szintfelület helyes függőleges távolságát, azaz a kötőpontok m_i magasságkülönbségét kapjuk.

Ha az egyes műszerállásokban kapott magasságkülönbségeket hosszú úton összegezzük, akkor a végpontok magasságkülönbségére, a szintfelületek nem párhuzamos volta miatt, a *szintezés útvonalától függő* eredményt kapunk. Ha pedig zárt szintezési kört (poligont) alakítunk ki, hibátlan mérési eredmények esetén is, nullától eltérő, ún. *elméleti záróhibára* jutunk.

Szintfelületek távolságának jellemzésére nagyobb kiterjedésű területen (a felsőgeodéziában) a szintezett (ún. *nyers*) magasságkülönbségek nem alkalmasak, ezért más magassági mérőszámokat kell bevezetni.

531.1. A geopotenciális érték

A nehézségi erőtér szintfelületei között – mint láttuk – nem a függőleges távolságok, hanem a potenciálkülönbségük állandó. Ezért méréseinkkel is *ΔW potenciálkülönbséget kell meghatározni,* ami munka jellegű mennyiség. Ehhez a szintezés útvonala mentén nehézségi méréseket is kell végezni, és a szakaszok $g_i \cdot m_i$ szorzatának összegezésével jutunk a keresett eredményre.

A geoidhoz, mint magassági alapszintfelülethez viszonyított potenciálkülönbséget nevezzük *geopotenciális értéknek,* és K-val jelöljük. Ezt elvileg a $g\,\mathrm{d}m$ elemi szorzatoknak az O magassági kiindulópont és a P pont közötti vonalintegráljaként értelmezzük (ahol dm a (nyers) szintezett elemi magasságkülönbségeket jelenti). Ezt gyakorlatilag a szintezési szakaszokra vonatkozó $g_i \cdot m_i$ szorzatoknak a két végpont közötti összegezésével tudjuk számszerűen előállítani.

Valamely P pont geopotenciális értéke, tehát

$$K_P = W_0 - W_P = \int_O^P g\,\mathrm{d}m \approx \sum_O^P g_i\, m_i\,. \qquad (5311.1)$$

A geopotenciális érték szabatos szintezéssel és hozzá kapcsolódó nehézségi mérésekkel *feltevésmentesen meghatározható*. Egyszerű, természetes mérőszám a magasságra, melynek egyetlen hátránya az, hogy nem hosszúság jellegű. A geodéziában alkalmazott mértékegysége a *geopotenciális egység* (GPU = Geopotential Unit), ami 1 dJ/kg (vagy 10 m^2 s^{-2}). Ennek a mértékegységnek előnye az, hogy a pontok geopotenciális értéke számszerűen csak mintegy 2%-kal különbözik a pontok – későbbiekben tárgyalandó – hosszegységben (m-ben) kifejezett magasságától.

A gyakorlatban a geopotenciális értéket különböző magassági mérőszámokat használó (nemzeti) magassági alapponthálózatok összekapcsolásakor (együttes kiegyenlítésekor) használjuk.

A felhasználó azonban hosszúság jellegű magassági mérőszámot igényel, ezért ilyen megoldást kell keresni.

531.2. Az ortométeres magasság

Valamely P pont *ortométeres magasságán* a P ponton átmenő szintfelület és a magassági alapszintfelület távolságát értjük *a P pont függővonalán mérve.* Ezzel az értelmezéssel kiküszöböltük a szintfelületek nem párhuzamosságából származó bizonytalanságot a magasság kérdésében.

Az ortométeres magasság kiszámítása érdekében írjuk fel a P pontnak a geoidon fekvő O magassági kiindulóponthoz viszonyított $W_0 - W_P$ potenciálkülönbségét egyrészt a *fizikai földfelszínen,* a szintezés útvonala mentén, ennek eredményeként (ez éppen a pont geopotenciális értéke), másrészt az O pontból kiindulva a *geoidon* a P pont P′ geoidi megfelelőjéig, majd innen a P pont függővonalán a földfelszínig haladva. A kétféle úton felírt potenciálkülönbséget egymással egyenlővé téve, kiszámíthatjuk a PP′ függővonal-szakasz

$$H_P = \frac{1}{\tilde{g}_P}\int_O^P g\,dm = \frac{K_P}{\tilde{g}_P} \approx \frac{1}{\tilde{g}_P}\sum_O^P g_i\, m_i \ , \qquad (5312.1)$$

ívhosszát, amit úgy kapunk, hogy az O és a P pont mért potenciálkülönbségét elosztjuk a nehézségi térerősségnek a P pont függővonala mentén, a geoid és földfelszín közötti $\tilde{g}_P$ *átlagértékével* (feltételezve azt, hogy a *g* nehézségi térerősség a tengerszint és a földfelszín között, a P pont függővonalán, a magassággal egyenletesen változik).

Ezt az átlagértéket közvetlenül mérni nem tudjuk. Számítása a mért földfelszíni érték és a geoid és a felszín közötti földtömeg eloszlására vonatkozóan felvett valamilyen modell alapján lehetséges. A modell meghatározása azonban a Föld belsejére vonatkozó ismereteinket pótló feltevéseket igényel, így ennek több módja is kialakult.

Egyik szokásos megoldás a (34.6) *Poicaré-Prey*-féle modell alkalmazása. Korábban gyakran megelégedtek azzal is, hogy a $\tilde{g}_P$ átlagértéket a *normál nehézségi képletből* a P pont függőlegesén, a $H/2$ magassághoz kiszámított $\tilde{\gamma}_P$ *normálértékkel* közelítették (*normál-ortométeres magasság*).

Az ortométeres magasság általában jól használható, hosszúság jellegű magassági mérőszám, ami a gyakorlatban széles körben (korábban Magyarországon is) elterjedt. Hátránya, hogy a $\tilde{g}_P$ átlagérték számításán keresztül a valóságot közelítő feltételezésekhez kötött, továbbá, hogy a $H_1 = H_2 = ... = H_i =$ állandó ortométeres magassággal jellemzett pontok általában *nem fekszenek azonos szintfelületen* (a víz elfolyik közöttük).

Említett hátrányai ellenére több ország használja országos magassági alapponthálózata magassági adatainak megadására.

531.3. A dinamikai magasság

Az ortométeres magasságnak ezen legutóbb említett hátrányán segít a dinamikai magasság fogalmának a bevezetése. Erre úgy jutunk, hogy a P ponton átmenő szintfelületnek a geoidhoz viszonyított (mért) potenciálkülönbségét, azaz a P pont geopotenciális értékét elosztjuk valamely *megállapodásszerűen rögzített normál nehézségi értékkel*. Így a potenciálkülönbséggel arányos nagyságú, de hosszúság jellegű magassági mérőszámra jutunk.

A felvett normál nehézségi erő érték általában a $\varphi = 45°$ szélességen (ill. *Rédey* professzor javaslata szerint a $\varphi = 90°$ helyen, a sarkokon) az ellipszoid felszínére, valamely nemzetközileg elfogadott geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi képletéből kiszámított érték. Ezzel a P pont *dinamikai magassága*

$$H_{\mathrm{P}}^{\mathrm{din}} = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} K_{\mathrm{P}} \approx \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \sum_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} g_i\, m_i \,. \tag{5313.1}$$

A dinamikai magasság értelmezésének megfelelően, az *azonos szintfelületen fekvő pontok dinamikai magassága azonos.* Ezzel szemben hátránya, hogy a nyers (szintezett) magasságokat meglehetősen nagy javítással kell ellátni, ami országos szintezési hálózatok gyakorlati használatakor gondot jelenthet. A dinamikai magasságnak geometriai tartalma tulajdonképpen nincs, ez egyszerűen a pont geopotenciális értékével arányos, hosszúságjellegű mennyiség.

Az utóbbi évtizedekben még további magassági mérőszám is elterjedt a geodéziai gyakorlatban *normálmagasság* elnevezéssel. Ezt későbben fogjuk tárgyalni [533.].

Feladatok

- Ismételjük át a szintezésnek a Geodézia és a Geodéziai alaphálózatok tantárgyban tanult szabályait és bizonyítsuk, hogy megtartásuk és további két feltétel mellett egyetlen műszerállásban a helyes magasságkülönbséget kapjuk eredményül!

- Nagy távolságokra szintezve miért függ a kapott eredmény a szintezés útvonalától?

- Miért kell a felsőgeodéziában a szintezés mellett nehézségi mérést is végezni?

- Mik a geopotenciális érték tulajdonságai? Bizonyítsuk az ortométeres magasság számítására szolgáló (5312.1) helyességét!

- Soroljuk fel az ortométeres magasság tulajdonságait!

- Mikor van szükség a dinamikai magasság használatára?

- Lehet-e a dinamikai magasságnak geometriai értelmezést találni?

532. A trigonometriai magasságmérés alkalmazása

Trigonometriai magasságméréskor az ismert vízszintes helyzetű P_1 és P_2 pontban megmérjük a két pont között haladó fénysugár terjedési görbéjének Z_1 és Z_2 *szintfelületi zenitszögét*. A pontok s_{12} ellipszoidi távolsága (ívhossza) a koordinátáikból számítható, tehát ismert.

A fénysugár terjedési görbéjének végérintői a két pontot összekötő húrral a δ_1 és a δ_2 fénytörési (refrakciós) szöget zárják be. A helyi függőleges (a helyi szintfelületi normális) iránya a ponton átmenő ellipszoidi felületi normális irányával a függővonal-elhajlás P_1 és a P_2 pontot összekötő irányra vonatkozó vetületének megfelelő ϑ_1 és ϑ_2 szöget zárja be. A pontoknak az ellipszoid feletti magassága h_1, ill. h_2.

Az ellipszoid $s_{1,2}$ ívdarabját helyettesítjük az R átlagos középgörbületi sugarú gömbi ívvel. Az $s_{1,2}$ gömbi ívhosszhoz tartozó középponti szög a K metszéspontban legyen a γ szög.

A P_1, P_2, K síkháromszögre felírt tangenstételből, a háromszög belső szögösszegét kifejező összefüggésből tg $\gamma/2$-et hatványsorba fejtve, ennek első két tagjára korlátozódva és a $\gamma/2 = s_{1,2}/2R$ helyettesítéssel kifejezhetjük a két pont *ellipszoid feletti magasságának* különbségét a

$$\Delta h_{1,2} = h_2 - h_1 = s_{1,2}\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{2R} + \frac{s_{1,2}^2}{12R^2}\right)\operatorname{tg}\frac{(z_2+\delta_2)-(z_1+\delta_1)}{2} \qquad (532.1)$$

alakban, ahol z_1 és z_2 a megfelelő *ellipszoidi zenitszöget* jelöli, amit a mért szintfelületi zenitszögből a függővonal-elhajlás megfelelő irányú vetületének figyelembe vételével számíthatunk ki. (Megjegyezzük, hogy az (532.1)-ben a függővonal-elhajlás elhanyagolásával az ellipszoidi zenitszög helyett a *Z mért szintfelületi zenitszöget* írjuk, akkor eredményül értelemszerűen a pontok *tengerszint feletti magasságának* $\Delta H_{1,2} = H_2 - H_1$ különbségét kapjuk.)

A trigonometriai magasságmérés legkényesebb pontja a δ_1 és a δ_2 refrakciós szög meghatározása. A gyakorlatban általában a fénysugár terjedési görbéjét R/k sugarú körívvel helyettesítjük, ahol k a fénytörési (refrakciós) együttható és általában $k < 1$. A zenitszögek mérését pedig célszerűen mindkét végpontról egyidejűen végezzük. Ez esetben jó közelítéssel feltételezhetjük, hogy $\delta_1 = \delta_2$, miáltal ez a hatás az (532.1)-ből a különbségképzés révén kiesik.

Ezzel szemben lehetővé válik a k fénytörési együttható számértékének kísérleti meghatározása a

$$k = 1 - \frac{z_1 + z_2 - 180^\circ}{\gamma} \qquad (532.2)$$

összefüggés alapján, ahol $\gamma = s_{1,2}/R$ helyettesítéssel élünk. A k együttható értéke, különösen a talaj közelében, viszonylag tág határok között változik. A talajtól távolabb, nagyobb magasságban már kisebb változást mutat, és magashegységekben pedig igen kevéssé változó kis érték. Ezért a trigonometriai magasságmérés elsősorban ez utóbbi környezetben vezet jó eredményre. Ilyen körülmények között előnyösen alkalmazható a *függővonal-elhajlások sűrítésére* is. A P_1, P_2, K háromszög szögösszegét kifejező összefüggésnek a megfelelő átrendezésével ugyanis a

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (z_1+z_2) - \gamma - 180° + (\delta_1+\delta_2) \qquad (532.3)$$

alakra jutunk, ahol $\gamma = s_{1,2}/R$ és ismét a $\delta_1 = \delta_2$ feltevéssel élve $\delta_1+\delta_2 = k\gamma$ helyettesítést végzünk.

Ha ismert függővonal-elhajlású végpontok között pontpáronként egyidejű trigonometriai magasságméréssel magassági sokszögvonalat vezetünk, akkor a közbenső pontokra számítható lesz a függővonal-elhajlás és a k fénytörési együttható pillanatnyi értéke.

A trigonometriai magasságmérés (főként magas hegyvidéken) alkalmazható a geoid-ellipszoid távolságok különbségének meghatározására is a

$$\Delta N_{1,2} = N_2 - N_1 = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1) \qquad (532.4)$$

összefüggés alapján, ahol a h ellipszoid feletti magasságokat trigonometriai magasságméréssel és a H tengerszint feletti magasságokat szabatos szintezéssel határozzuk meg.

Feladatok

- Vázlat és geometriai megfontolás segítségével bizonyítsuk az (532.1) helyességét!

- Milyen közelítéseket tartalmaz az (532:1)?

- Milyen feltételezés mellett tudjuk az (532.1)-et gyakorlatilag hasznosítani és mikor várható ezek teljesedése?

- Mutassuk be az (532.3) gyakorlati alkalmazását két oldalból álló magassági sokszögvonal példáján!

- Vázlattal bizonyítsuk az (532.4) helyességét!

533. Magasságmeghatározás mesterséges hold észleléssel

Mint tudjuk, mesterséges holdak geodéziai észlelésével az álláspontunk (geocentrikus) helyvektorát tudjuk közvetlenül meghatározni. Földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerünk tengelyeire E(a,f) paraméterű vonatkoztatási ellipszoidot illesztve, egyszerű átszámítással megkaphatjuk a pont (φ, λ, h) *ellipszoidi* koordináta-hármasát. Ha a pontunk geoid (tengerszint) feletti H magasságát is meghatározzuk, pl. szintezéssel, akkor ebben a pontban megkaphatjuk az

$$N = h - H$$

geoid-ellipszoid távolságot. (Ezt az összefüggést használtuk már a geoid meghatározására a szatellitageodézia geometriai módszerének alkalmazásakor [523.1].)

Most ezt a módszert arra fogjuk használni, hogy a mesterséges hold észleléssel (GPS-méréssel) és szintezéssel (is) így meghatározott P_i és P_j pont közötti további P_k pont (pontok) *geoid (tengerszint) feletti magasságát* meghatározzuk további *mesterséges hold észleléssel* (GPS-szintezés).

A közbenső P_k pont H_k *geoid (tengerszint) feletti magasságát* a

$$H_k = h_k - N_k$$

alakból számítjuk ki, ahol tehát h_k a pont mesterséges hold észleléssel meghatározott ellipszoid feletti magassága és $N_k = N_k(N_i, N_j)$ a P_i és a P_j pont előbbi módon meghatározott geoid-ellipszoid távolságából valamilyen predikciós eljárással a P_k közbenső pontra kiszámított érték. (A gyakorlatban ez a predikciós eljárás többnyire az egyszerű lineáris predikció.)

Ezzel a megoldással a munka-, és így, költségigényes szintezés helyett sokkal gyorsabb és olcsóbb GPS-méréssel tudjuk közbenső pontok *geoid (tengerszint) feletti magasságát* meghatározni. Az eljárás megbízhatósága (a GPS-mérés megbízhatóságán túl) alapvetően a közbenső pont (interpolált) *geoid-ellipszoid távolságának* megbízhatóságától függ. A módszer alkalmazható, természetesen, több szintezett GPS-pont felhasználásával, akár vonal mentén, akár felületdarabra kiterjesztve, és a geoid-ellipszoid távolságok interpolálásába más információk is bevonhatók.

A hazai gyakorlatban már egyes területeken a 3. rendű szintezés kiváltására eredményesen használjuk ezt az eljárást.

A módszer általánosítása az, ha nagyobb felületdarabon mind a szintezett GPS-pontokra (GPS-geoid [523.1.]), mind a csillagászati-geodéziai [521.], mind a nehézségi, valamint gradiométeres mérésekre támaszkodó *kombinált megoldással* (pl. kollokációval) előállítjuk a lehető legrészletesebb geoidábrázolást (az ún. „*centiméter-geoidot*”), és ezt használjuk fel a területen végzett további GPS-mérésekkel terepi pontok tengerszint (geoid) feletti magasságának meghatározására (GPS-szintezésre).

14. Hét

534. A peremérték-feladat megoldása a fizikai földfelszínre

Ebben a fejezetben a fizikai földfelszín meghatározásának újabb módszerét ismerjük meg, amely a harmadik peremérték-feladatnak a fizikai földfelszínre vonatkozó megoldásán alapszik. Az eljárás nagy előnye elvi tisztasága, vagyis az, hogy a fizikai valóságban mérhető mennyiségekre közvetlenül támaszkodva teszi lehetővé a feladat megoldását, elkerülve az ismereteink hiányait pótló feltevéseket. Ez azáltal válik lehetővé, hogy a helymeghatározó adatok mindegyikét a *normál nehézségi erőtérben* értelmezi, melynek matematikai összefüggéseit pontosan ismerjük, hiszen magunk választhatjuk meg. Így, ebben az eljárásban a normál nehézségi erőtérnek még nagyobb jelentősége lesz az eddiginél.

A földfelszíni P pont helyzetének meghatározására a fizikai valóságban mérni tudjuk a pont Φ_i és Λ_i *szintfelületi földrajzi szélességét és hosszúságát*, valamint a tengerszintről kiinduló szintezéssel és nehézségi mérésekkel a geoidhoz viszonyított $W_0 - W_P$ *potenciálkülönbségét.* Ezen túlmenően még az is szükséges, hogy a Föld egész felszínéről legyenek *nehézségi mérési eredményeink.*

Keressük a földfelszíni P pont φ, λ és h ellipszoidi koordinátáit, amelyek a geodéziai dátum ismeretében a pont térbeli helyzetét meghatározzák.

A feladat megoldásához felvett geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi erőterének ellipszoid alakú szintfelülete (a Föld normál alakja) lesz helymeghatározó koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidja. A szintellipszoid U_0 normál- és a geoid W_0 valódi potenciálértékét számszerűen azonosnak tekintjük.

A P földfelszíni pont ellipszoidi P″ megfelelőjét most úgy állítjuk elő, hogy a P pontot a *normál nehézségi erőtér* rajta átmenő *függővonalával* (erővonalával) vetítjük az ellipszoid felszínére. A P pont ellipszoidi földrajzi szélességét és hosszúságát a P″ pontbeli ellipszoidi felületi normális térbeli helyzetét jellemző φ és λ szöggel értelmezzük.

Ez utóbbiakra a következő módon jutunk. A földfelszíni P pontban a valódi és a normál nehézségi térerősség vektornak hatásvonala által bezárt szöget (vagyis a valódi és a normálpotenciál szintfelületének felületi normálisa által bezárt szöget) *földfelszíni,* vagy *Mologyenszkij-féle függővonal-elhajlásnak* nevezzük. Ennek ξ^M meridián és η^M I. vertikális irányú összetevőjének figyelembe vételével könnyen számítható a P pont φ^n *normálszélessége* és λ^n *normálhosszúsága*, melyek a normál nehézségi erőtér függővonala P pontbeli érintőjének térbeli helyzetét adják meg

$$\varphi^n = \Phi - \xi^M \qquad \text{és} \qquad \lambda^n = \Lambda - \eta^M / \cos\Phi.$$

A *P pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit* pedig úgy kapjuk, hogy a normálszélességet és a normálhosszúságot a normál nehézségi erőtér függővonalának görbültsége miatt megjavítjuk. Mivel a normál nehézségi erőtér forgási szimmetriás eloszlású, függővonala a meridiánsíkban fekvő síkgörbe, így a javítás csak a φ^{n} koordinátát változtatja a függővonal P és P″ pontbeli érintőjének κ iránykülönbségével. Így

$$\varphi = \varphi^{\mathrm{n}} - \kappa \qquad \text{és} \qquad \lambda \equiv \lambda^{n}.$$

A vonatkoztatási ellipszoid *geocentrikus elhelyezésű.*

Harmadik koordinátaként most is az *ellipszoid feletti h magasságot* használjuk, amit két részből teszünk össze. Ennek érdekében keressük meg a normál erőtérnek a P ponton átmenő függővonalán azt a P‴ pontot, amelyben a normálpotenciál $U_{\mathrm{P'''}}$ számértéke éppen a P pont valódi W_{P} potenciálértékével egyenlő. A P pont függővonalának a P″ P‴ szakaszát nevezzük a P pont H^{n} *normálmagasságának* és a P‴ P függőleges távolság pedig az N^{n} *magassági rendellenesség*. E két utóbbi mennyiség

$$h = H^{\mathrm{n}} + N^{\mathrm{n}}$$

összege teszi ki a P pont ellipszoid feletti h magasságát.

Megjegyezzük, hogy a külföldi szakirodalomban gyakran találkozhatunk a magassági rendellenességre a ζ jelöléssel, továbbá a valódi nehézségi erőtér szintfelüIeteire a *geop* és a normál nehézségi erőtér szintfelületeire a *szferop* elnevezéssel.

Egész földi viszonylatban a P‴ pontok összessége által alkotott felület a *fizikai földfelszín első közelítése*, amit *telluroidnak* is szokás nevezni. (Az első közelítés itt a magassági rendellenesség elhanyagolását jelenti.)

A továbbiakban bemutatjuk, hogy a földfelszíni pont magassági helyzetét jellemző, most ismertetett mennyiségekre hogyan juthatunk a mérési eredmények alapján.

534.1. A normálmagasság

Láttuk a korábbiakban, hogy a Föld valóságos nehézségi erőterének szintfelületei között értelmezett *ortométeres magasság* kiszámításához a nehézségi térerősségnek a P pont függővonala mentén a pont és a geoid közötti $\tilde{g}_{\mathrm{P}}$ átlagértékének ismerete szükséges [531.2]. Mivel ezt a Föld belsejében mérni nem tudjuk a felszínközeli tömegek sűrűségeloszlására vonatkozó feltevések mellett, számítással tudjuk csak megközelíteni.

Hogy az ezzel járó bizonytalanságokat elkerüljük, inkább lemondunk arról, hogy a magasságot a Föld valóságos nehézségi erőterében értelmezzük. Így jutunk arra a megoldásra, hogy magassági mérőszámként a *normálmagasságot* vezetjük be. Ez pedig a pont geoidhoz viszonyított $W_0 - W_{\mathrm{P}}$ valódi potenciálkülönbségének a normál nehézségi erőtérben megfelelő függőleges távolság (vagy magasságkülönbség), amit a

$$H_{\mathrm{P}}^{\mathrm{n}} = \frac{K_{\mathrm{P}}}{\tilde{\gamma}_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_{\mathrm{P}}} \int_{O}^{\mathrm{P}} g\, dm = \approx \frac{1}{\tilde{\gamma}_{\mathrm{P}}} \sum_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} g_i\, m_i \qquad (5341.1)$$

összefüggésből számíthatunk.

A nevezőben szereplő $\tilde{\gamma}_P$ *átlagos normál nehézségi értéket* úgy kapjuk, hogy a felvett normál nehézségi képletből az ellipszoid felszínére kiszámítható értéket a tiszta magassági hatással az ellipszoid fölé $H_P/2$ magasságra átszámítjuk. (Ez most nem tartalmaz semmiféle közelítést, mert a vonatkoztatási rendszert úgy alkottuk meg, hogy a Föld normálalakja (a szintellipszoid) a Föld össztömegét magába zárja, így felette már tömegek nincsenek! Ebben rejlik a normálmagasság feltevésmentessége.)

Az (5331.1)-ben m_i most is az *i*. szintezési szakasz szintezett (nyers) magasságkülönbségét, g_i a hozzá tartozó mért nehézségi értéket és K_P a pont geopotenciális értékét jelenti.

A normálmagasság tehát a mérési eredményekből feltevésmentesen, tetszőleges pontossággal számítható. Gyakorlati célra, pl. országos magassági alapponthálózat számára, jól megfelelő magassági mérőszám. Közel áll az ortométeres magasság értékéhez, eltérése ettől, hazai viszonylatban 0,1 m-nél, egész földi viszonylatban 2 m-nél kisebb. A gyakorlatban széles körben elterjedt, az európai országok, közöttük Magyarország hivatalosan használt magassági mérőszáma.

Egyetlen hátránya, hogy a valóságban azonos szintfelületen fekvő pontok normálmagassága csak akkor azonos, ha a pontok azonos szélességi vonalon fekszenek.

534.2. A magassági rendellenesség

A földfelszíni P pont ellipszoid feletti magasságának másik része a P‴ P távolság, a *magassági rendellenesség*. Mivel a normál nehézségi erőtér P‴ ponton átmenő szintfelületének $U_{P'''}$ potenciálértéke megegyezik a P pont W_P valódi potenciáljával (mert így választottuk ki), ezért a feladat most is − mint a geoid meghatározásakor − azonos potenciálértékű valódi és normál szintfelület egymástól mért távolságának meghatározása a földfelszínen nyert mérési eredményekből.

A feladat lényegében a *potenciálelmélet 3. peremérték-feladatának megoldása a földfelszínre.* A megoldásnak több útja ismeretes.

Az egyik megoldási utat követve a földfelszínt a telluroiddal közelítjük, és lineáris integrálegyenletet állítunk fel a T potenciálzavar meghatározására.

Ennek megoldása sor alakjában kapható, a következő feltételek mellett

- a vonatkoztatási (szint)ellipszoid U_0 és a geoid W_0 valódi potenciálértéke számszerűen azonos,
- a normál nehézségi erőtér forrását képező tömeg megegyezik a Föld *M* össztömegével,
- a koordináta-rendszerünk kezdőpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük és
- egyes lépésekben az ellipszoidot gömbbel helyettesítjük.

Az így nyert *T* potenciálzavart *Bruns* képletébe helyettesítve, jutunk a magassági rendellenességre. A sor első két tagjára korlátozódva *Mologyenszkij* megoldása a telluroid felszínére kiterjesztett felületi integrál

$$N^{\mathrm{n}} = N^{\mathrm{n}}(\Delta g_i,\ G1_i,\ \tilde{\gamma}\ ), \qquad (5342.1)$$

ahol

$$\Delta g_i = (g_{\mathrm{P}} - \gamma_{\mathrm{P}'''})_i \qquad (5342.2)$$

a *földfelszíni nehézségi rendellenesség*, és

$$G1_i = G1((\,H_i^{\mathrm{n}} - H_{\mathrm{P}}^{\mathrm{n}}\,),\ \Delta g_i) \qquad (5342.3)$$

az (5342.2)-nek a földfelszíni *domborzat hatását* kifejező első fokú javítása, ami gyakorlatilag csak magasabb hegyvidéken ér el figyelembe veendő mértéket.

Megjegyezzük, hogy az (5332.1) határesetként a geoidra vonatkozó megoldást is tartalmazza, ha ebbe a

$$\Delta g = g_{\mathrm{P}'} - \gamma_{\mathrm{P}''}$$

geoidi nehézségi rendellenességet és a P pont és a felszín *i* futópontja közötti magasságkülönbségre

$$H_i^{\mathrm{n}} - H_{\mathrm{P}}^{\mathrm{n}} = 0$$

értéket írunk (mivel a geoidon fekvő pontok között magasságkülönbség nincs).

(Az (5342.1)-ben előírt felületi integrál alakjával – a felsőgeodézia fizikai geodéziai módszereinek további részleteivel együtt – a mesterképzés *Fizikai geodézia* tantárgyában fognak megismerkedni.)

Ha a terepszinti P pontok normál függővonalára a vonatkoztatási ellipszoidtól először a magassági rendellenességet mérjük fel, (vagy ha a P pontokból lefelé a normálmagasságot mérjük vissza,) akkor olyan P'''' pontokra jutunk, amelyeknek összessége a *kvázigeoidot* alkotja. Ennek az ellipszoidtól mért távolsága olyan mértékben különbözik a geoid-ellipszoid távolságtól mint a normálmagasság az ortométerestől (ugyanis a P tereppontnak az ellipszoid feletti *h* magassága, függetlenül a meghatározás módjától, ugyanannyi).

A megoldás elvi előnye, hogy egyrészt elkerüli a földfelszíni mért *g* értékek geoidra átszámítását, másrészt lehetőséget ad a domborzat hatásának figyelembevételére.

534.3. A földfelszíni függővonal-elhajlás

A csillagászati szintezés (5211.1) alapösszefüggéséből látható, hogy a geoid-ellipszoid távolság megváltozása a függővonal-elhajlás vonalintegrálja. Ennek megfordításával kapjuk, hogy a függővonal-elhajlás összetevők pedig, a geoid-ellipszoid távolságok meridián- illetve erre merőleges irányú ívhossz szerinti differenciálásával származtathatók. Ennek a kapcsolatnak az alapján az (5342.1) megfelelő irányú differenciálásával kaphatjuk a *földfelszíni függővonal-elhajlás* kiszámítására alkalmas

$$\xi^{M} = \xi(\Delta g_i, \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H}\right)_i, H_i - H_P) \quad \text{és} \quad \eta^{M} = \eta(\Delta g_i, \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial H}\right)_i, H_i - H_P) \qquad (5343.1)$$

(felületi integrál) összefüggést.

Ez az összefüggés is − szükség esetén − lehetővé teszi a domborzat hatásának figyelembe vételét. (Határesetként tartalmazza a geoidi függővonal-elhajlás kiszámítására szolgáló ún. *Vening Meinesz*-féle képletet is, amelyet a Fizikai geodézia tantárgy tárgyal.)

*

A peremérték-feladat megoldása a fizikai földfelszínre végül is olyan helymeghatározási lehetőséget nyújt, amely a φ, λ, h ellipszoidi koordináta-hármas feltevésmentes meghatározását teszi lehetővé, ténylegesen mért *földfelszíni* mérési eredményekből.

A jelenlegi gyakorlatban a *vízszintes helyzet* (φ és λ) meghatározása tekintetében a megoldás inkább elvi jelentőségű, mert a nehézségi mérések nem egyenletes földfelszíni eloszlása miatt az (5343.1)-ből számított függővonal-elhajlás összetevők megbízhatósága meglehetősen változó a Föld különböző helyein, és nem éri el egyelőre a szükségest. Ezért erre a célra ma már a GPS használata sokkal jobb eredményre vezet.

Ezzel szemben a *normálmagasság* jól meghatározott, feltevésmentes, egyértelmű magassági mérőszám, ami a gyakorlatban széles körben elterjedt.

Így a *magassági rendellenesség* is nagyobb megbízhatósággal nyerhető, a GPS-méréssel meghatározott h ellipszoid feletti magasság és a H^n normálmagasság

$$N^n = h - H^n$$

különbségeként, mint az (5342.1) szerinti meghatározásával. Ezzel a megoldással most a *kvázigeoidnak* az ellipszoidtól mért távolságát kapjuk, pl. szintezett GPS-pontokban.

A mai gyakorlatban találkozunk mind a *geoid*, mind a *kvázigeoid* fogalmával. A kettő a tengereken egybeesik, a szárazföldeken pedig annyira különbözik, mint az ortométeres magasság a normálmagasságtól (<2 m). A két felület pontjait ugyanis úgy értelmezhetjük, hogy a fizikai földfelszínen lévő pontból vagy az *ortométeres* magasságot, vagy a *normálmagasságot* mérjük vissza a pont függővonalán. Első esetben a *geoid,* második esetben a *kvázigeoid* pontjaira jutunk.

IRODALOM

A felsőgeodéziának az igen gazdag szakirodalmából általános tájékozódás céljára megadjuk a legjobb áttekintést nyújtó néhány *kézikönyvet, tankönyvet.* Ezek jól használhatók az idegen nyelvű szaknyelv megismeréséhez, elsajátításához is.

Ajánlott irodalomként megadunk továbbá a tananyag egyes részeihez néhány legkönnyebben elérhető magyar nyelvű művet, amelyek egyes részletek jobb megértését segíthetik. Bennük bőven található további szakirodalmi utalás egyes további részletkérdésekre vonatkozóan.

A *Geodézia és Kartográfia* folyóirat válogatott anyaga (1988-tól) elérhető a FÖMI honlapján: http://www.fomi.hu/honlap/magyar/szaklap/ .

Kézikönyvek, tankönyvek

Biró P.: Felsőgeodézia (BME egyetemi jegyzet). Műegyetemi kiadó, Budapest, 2000.

Groten, E.: Geodesy and the Earth's Gravity Field. Vol. I-II. Dümmler, Bonn, 1979.

Hazay I. (szerk.): Geodéziai Kézikönyv I. Közgazdasági és jogi Kiadó, Budapest, 1956.

Heiskanen, W. A. - Moritz, H.: Physical Geodesy. Freeman W. H. and Company, San Francisco and London, 1967.

Helmert, F. R.: Die matematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Teubner, Leipzig 1880/1884 és 1966.

Hofmann-Wellenhof, B.- Moritz, H.: Physical Geodesy. SpringerWienNewYork, 2005

Homoródi L.: Felsőgeodézia. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Jordan – Eggert - Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde 10. Aufl., Bd. V.:

Ledersteger, K.: Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung). J. B. Metzler, Stuttgart, 1969.

Levallois, J. J.: Géodésie Générale. Tome 1-4. Ed. Eyrolles, Paris, 1969/71.

Molodenskii, M .S. - Eremeev, V. F.- Yurkina, M. I.: Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. Israel Progr. for Scient. Transl. Jerusalem, 1962.

Moritz, H.: Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980.

Torge, W.: Geodesy (3rd Edition). Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

Torge, W.: Geodäsie (2. Auflage). Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2003.

Vaniček, P. - Krakiwsky, E. J.: Geodesy: The Concepts (2nd Edition). North-Holland Publ.Co., Amsterdam, 1986.

Magyar nyelvű ajánlott irodalom

Az 1. részhez

Ádám J.: A kozmikus geodézia koordináta-rendszerei. Geodézia és Kartográfia, 38, 2, 1986, 84-92.

Biró P.: Kozmikus geodéziai alapfogalmaink újragondolása. Geomatika Közlemények Vol. V., 2002, 7-24.

Rédey I.: A potenciálelmélet alkalmazása a geodéziában. Térképészeti Közlöny 13. sz. különfüzete, Honvéd Térképészeti Intézet, Budapest, 1950.

Rédey I.: A geodézia geofizikai feltevései. Térképészeti Közlöny 14. sz. különfüzete, Honvéd Térképészeti Intézet, Budapest, 1950.

Tóth Gy.: Eötvös-inga mérések és geodéziai alkalmazásuk. Geomatikai Közlemények III., 2000, 149-156.

A 2. részhez

Ádám – Bányai – Borza – Busics – Kenyeres – Krauter – Takács: Műholdas helymeghatározás. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004.

Biró P.: A csillagászati geodézia helye a XXI. században. Geodézia és Kartográfia 56. 2. 2004, 3-11.

Krauter A.: Geodézia. Műegyetemi kiadó, Budapest, 2002.

Husti – Ádám – Bányai – Borza – Busics – Krauter: Globális helymeghatározó rendszer (bevezetés). Második, javított kiadás, Nyugat-Magyarországi Egyetem, Sopron, 2001.

Csapó G.: Nehézségi gyorsulás mérése abszolút módszerrel ballisztikus lézergraviméterrel. Geodézia és Kartográfia 33, 1981, 176-180.

Csapó G, – Völgyesi L.: A nehézségi erő vertikális gradiensének mérése és szerepe a nagypontosságú graviméteres méréseknél magyarországi példák alapján. Magyar Geofizika, Vol. 43, Nr. 4, 2002, 151-160.

Völgyesi L.: Geofizika (BME egyetemi jegyzet). Műegyetemi kiadó, Budapest, 1999, 166-192.

Völgyesi L. – Tóth Gy.: Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk. Geodézia és Kartográfia, 54, 10, 2002, 28-33.

A 3. részhez

Biró P.: A geodéziai alapfelületek. Geodézia és Kartográfia 24, 1972, 401-412.

Biró P.: A felsőgeodézia fizikai modelljei. A földtudományok és a változó világ továbbképző szeminárium előadásainak gyűjteményes kötete, MTA GGKI, Sopron, 1990, 22-31.

Bod E.: A magyar asztrogeodézia rövid története 1730-tól napjainkig. Geodézia és Kartográfia 34, 1982, 283-289 és 368-375.

Farkas M.: Speciális függvények. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.

Márton P.: Földmágnesség. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

Rédey I.: A geodézia története (BME egyetemi jegyzet). Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Simonyi K.: Elméleti villamosságtan (Egyetemi tankönyv), Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

A 4. részhez

Ádám J.: Vizsgálatok felsőrendű háromszögelési hálózatunk abszolút elhelyezésére és tájékozására. Geodézia és Kartográfia, 39, 4, 1987, 244-248.

Ádám J.: Geodéziai alaphálózatunk, továbbá a doppleres és a stelláris háromszögelési hálózataink vonatkozási rendszerének összhangja. Geodézia és Kartográfia, 44, 2, 1992, 85-92.

Ádám J.: Európa egységes geodéziai alapjainak létrehozása (Nemzetközi tanácskozás a Budapesti Műszaki Egyetemen, 1993. május 17-20.) Geodézia és Kartográfia, 45, 5, 1993, 265-274.

Ádám J.: Magyarországon alkalmazott geodéziai vonatkozási rendszerek vizsgálata. Geodézia és Kartográfia, 52, 12, 2000, 9-15.

Ádám J.: A felsőgeodézia helyzete és időszerű feladatai Magyarországon. Székfoglalók a Magyar Tudományos Akadémián VI., MTA Budapest, 2003.

Biró P.: A vonatkoztatási rendszerek és a geodéziai dátum. Geomatikai Közlemények VIII, 2005, 6.-12.

Homoródi L.: Régi háromszögelési hálózataink elhelyezése és tájékozása. Földméréstani Közlemények 5, 1953, 1-18.

Homoródi L.: Új háromszögelési hálózatunk abszolút tájékozása. ÉKME Tudományos Közleményei VII. 2, 1961, 79-104.

Timár G, Molnár G.: A HD72 -> ETRS89 transzformáció szabványosítási problémái. Geodézia és Kartográfia, 54, 12, 2002, 28-30.

Az 5. részhez

Ádám J. – Gazsó M. – Kenyeres A. – Virág G.: Az Állami Földmérésnél 1969 és 1999 között végzett geoidmeghatározási munkálatok. Geodézia és Kartográfia, 52, 2, 2000, 7-14.

Ádám J. – Csapó G. – Mihály Sz.: Magyarország hozzájárulása az egységes európai geodéziai és geodinamikai alapok létrehozásához. Geodézia és Kartográfia, 52, 6, 2000, 18-27.

Ádám J. – Tokos T. – Tóth Gy.: Magassági mérőszámok és azok kapcsolata Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 54, 1, 2002, 5-10.

Biró P.: Geoidundulációk meghatározása geometriai módszerrel. ÉKME Tudományos Közleményei VI., 1960, 3-55.

Biró P.: A normálmagasság gyakorlati meghatározása. Geodézia és Kartográfia 14, 1962, 1-6. és 84-89.

Biró P,: A geodéziai gravimetria alapfeladatának megoldása a fizikai földfelszínre. ÉKME. Tud. Közl. 1966, 3-30.

Csatkai D.: Elsőrendű szintezési hálózatunk ortométeres javításainak számítása. Geodézia és Kartográfia, 9, 1957, 159-169.

Gazsó. M, Taraszova G.: A kvázigeoid asztrogravimetriai meghatározása Magyarországon. FÖMI Tudományos Közleményei, 5. évfolyam, Budapest, 1984.

Kenyeres A, - Seeman J.: Az OGPSH pontok tengerszint feletti magasságának meghatározása GPS technikával. Geodézia és Kartográfia, 51, 1, 1999, 18-23.

Kenyeres A, - Borza T.: Technológia fejlesztés a III. rendű szintezés GPS technikával történő kiváltására. Geodézia és Kartográfia 52, 1, 2000, 8-14.

Kenyeres A. - Csizmadia M. - Horváth J. - Kisasszondi F.: A GPS-szel végzett EOMA III. rendű hálózatsűrítés tapasztalatai. Geomatikai Közlemények V., 2002, 285-293.

Rédey I.; A dinamikai magasságról. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. VII., 4, Budapest, 1965.

Tóth Gy.: Az újabb gravimetriai geoidmeghatározások eredményei. Geomatikai Közlemények I., 1999, 71-79.

Tóth Gy.: Az Eötvös geodéziai peremértékfeladat. Geomatikai Közlemények, V., 2002, 163-174.

Völgyesi L.: Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérési eredmények alapján I.-II. Magyar Geofizika, Vol. XVIII, Nr. 5-6, 1977, 189-196, 226-230.

Völgyesi L. - Kenyeres A. - Papp G. - Tóth Gy.: A geoidmeghatározás jelenlegi helyzete Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 56, 12, 2004.

Völgyesi L. - Tóth Gy. - Csapó Géza - Szabó Z.: Az Eötvös-inga mérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 57, 6, 2005.